基于 VMD 时频分析方法的颤振试飞应用研究

王绍楠,刘立坤

(中国飞行试验研究院,西安 710089)

摘要:目的 针对颤振信号信噪比低、模态密集、非平稳的特点,发展一种能更好地应用于实际颤振试飞信 号的时频分析方法。方法 采用近年来新发展的变分模态分解(Variational Mode Decomposition, VMD)方法 把复杂信号分解为单一组分的本征模函数(Intrinsic Mode Function, IMF),再对其进行希尔伯特变换,求得 每一阶本征模函数的瞬时幅值和瞬时频率,从而进行信号的时频分析。结果 仿真算例验证了基于 VMD 的 时频分析方法在展现非平稳信号时频特征方面的有效性。将该方法应用于实际颤振试飞的异常振动数据, 可得到准确清晰的时频图,很好地展示出外挂物的极限坏振荡过程。结论 该方法可作为颤振试飞信号时频 分析的有力工具,有助于分析异常数据,确定故障来源,为后续问题解决提供支撑。 关键词:颤振试飞;非平稳;变分模态分解;本征模函数;时频分析

DOI: 10.7643/ issn.1672-9242.2020.09.028

中图分类号: V217 文献标识码: A

文章编号: 1672-9242(2020)09-0160-06

Application of Flutter Flight Test Based on Time-frequency Analysis Method

WANG Shao-nan, LIU Li-kun (China Flight Test Establishment, Xi'an 710089, China)

ABSTRACT: The work aims to develop a time-frequency analysis method which can be better applied in practical flutter flight test in view of the flutter signal characteristics of low SNR, dense mode and non-stability. Variational mode decomposition (VMD) developed in recent years was used to decompose the complex signal into some intrinsic mode functions (IMF) of single component. The instantaneous frequency and amplitude were calculated by the Hilbert Transform of IMF, and then the time-frequency analysis for signals could be conducted. The effectiveness of the time-frequency analysis method based on VMD in expressing the non-stationary characteristics of signal was validated by simulation example. By applying the method to the abnormal vibration data of actual flutter flight test, accurate and clear time-frequency diagram could be obtained, which could well show the limit cycle oscillation process of the stores. The method can be used as a powerful tool for time-frequency analysis of flutter flight test signals, which is helpful to analyze abnormal data, identify fault sources, and provide support for solving subsequent problems.

KEY WORDS: flutter flight test; non-stationary; variational mode decomposition; intrinsic mode function; time-frequency analysis

颤振试飞信号具有信噪比低、模态密集、非平稳的特点,且随着飞机设计中折叠机翼的出现,复合材

料的大量使用以及飞机外挂复杂化,使得信号的非平 稳特征更加突出^[1]。对非平稳信号处理成为飞行试验

Biography: WANG Shao-nan (1992-), Female, Master, Engineer, Research focus: aircraft structural dynamics.

收稿日期: 2020-07-02; 修订日期: 2020-08-07

Received: 2020-07-02; Revised: 2020-08-07

作者简介:王绍楠 (1992—), 女,硕士,工程师,主要研究方向为飞行器结构动力学。

工程中不可回避的问题^[2]。

传统的信号处理最常采用的方法是傅里叶变换 (FFT),但该方法不适用于瞬态信号和非平稳信号, 只是一种单纯的频域分析方法,无法获取时域信息。 短时傅里叶变换和小波变换虽然能改进不足,能满足 信号的时频局部化分析,但其本质还是属于傅里叶变 换。小波分析结果受小波基影响很大,目前缺乏系统 规范的小波基选取方法, 且小波变换是非自适应的, 小波基一旦被选定,整个分析过程只能采用同一小波 基。1998年,美籍华人 N. E. Huang^[3]提出了一种针 对非平稳、非线性的数据处理方法,称为希尔伯特黄 变换(Hilbert-Huang Transform, HHT)。该方法以经 验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD) 为核心,能够自适应地将非平稳信号分解为单一组分 的平稳信号,在处理非平稳信号方面有着广泛应用。 但该方法实践超前于理论,目前尚没有严格的理论支 持。2005年, Smith等^[4]提出了局部均值分解(LMD), 但递归式的模态分解(EMD、LMD等)采用的是基 于极值点的包络求取方法,多次的递归式分解会很大 程度上增加计算误差,容易出现模态混叠。虽然采用 集成式模态分解方法,如 EEMD^[5]和 ELMD^[6],可在 一定程度上抑制模态混叠现象,但计算量将大幅增 加,且这两种方法也无法将两个频率相近的分量正确 分离,均存在采样效应和端点效应的问题。

直到 2014年, Dragomiretskiy 等人^[7]提出了一种 完全不同于递归式模态分解的新方法,称为变分模态 分解(VMD)。该方法理论的总体思路为求解变分问 题,具有坚实的理论基础。其假设信号是由若干个不 同的具有中心频率和有限带宽的模态组成,由此构造 变分问题。再通过乘法算子交替方向法不断搜寻变分 问题最优解,使得每个模态的估计带宽之和最小。最 终,自适应地将信号中的单一组分模态成功分离。 VMD 可以将两个频率接近的谐波信号很好分离,表 现出更好的噪声鲁棒性。相比于递归式的模态分解方 法,VMD 的端点效应也更弱^[8-9]。

VMD 一经提出,即成为众多研究者研究的热点^[10-13]。目前,该方法已用于机械、电子、生物、 能源等领域,尤其在机械故障诊断中应用最广^[14-20]。 武英杰等^[11]将 VMD 应用于风机电组故障诊断中,证 明了 VMD 比 EMD 和 LMD 等递归式模态分解方法, 能更有效地避免噪声和冲击信号的频率混叠现象,也 更适合提取信号中的低频成分。赵岩等^[14]将 VMD 用 于旋转机械碰摩故障诊断,并得出该方法与 EEMD 相比可以有效抑制模态混叠,更加准确地反映故障信 息。唐贵基等^[15]将参数优化变分模态分解方法应用于 滚动轴承的早期故障诊断。陈立军等^[17]将 VMD 应用 于水声跳频信号的时频分析,结果表明其能在低信噪 比情况下获得高清时频图。刘长福等^[18]将 VMD 用于 变切深侧铣颤振特征的提取。然而,还未有将该方法 应用于颤振飞行数据处理的研究报道。鉴于该方法在 处理信噪比低、模态密集、非平稳信号中的优势,文 中首次将 VMD 方法引入颤振试飞领域,将其与希尔 伯特变换结合,用于颤振试飞数据的时频分析。

1 理论介绍

1.1 变分模态分解(VMD)理论

在 VMD 算法中,本征模函数(IMF)被重新定 义为一个调幅-调频信号,表达式为:

$$u_k = A_k(t)\cos(\phi_k(t)) \tag{1}$$

式中: $A_k(t)$ 表示瞬时幅值; $\phi_k(t)$ 表示瞬时相位,

瞬时频率为 $\omega_k(t) = \phi'_k(t) = \frac{\mathrm{d}\phi_k(t)}{\mathrm{d}t}$ 。

假设原始输入信号可分解为 K 个单一组分的 IMF 分量 $u_k(t)$,每个分量均具有各自的中心频率和 有限带宽。则变分问题可描述为:寻找 K 个模态函数 $u_k(t)$,使得每个 $u_k(t)$ 的估计带宽之和最小。约束条 件为:所有模态之和等于原始输入信号 f_o

$$\min_{\{u_k\}\{\omega_k\}} \left\{ \sum_k \|\partial_t \left[\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) \cdot u_k(t) \right] e^{-j\omega_k t} \|^2 \right\}$$

s.t.
$$\sum_k u_k = f$$
 (2)
$$\overrightarrow{r} + \cdot \{u_k\} = \{u_1 \cdots u_k\} \cdot \{\omega_k\} = \{\omega_1 \cdots \omega_k\}$$

 $\mathfrak{L}_{k} \stackrel{\text{\tiny therefore}}{:} \{u_{k}\} = \{u_{1}, \cdots, u_{K}\}; \{\omega_{k}\} = \{\omega_{1}, \cdots, \omega_{K}\};$ $\sum_{k} = \sum_{k=1}^{K} \circ$

为求以上变分问题的最优解,引入了二次罚因子 α及拉格朗日乘法算子 λ(t),得到如下的扩展拉格朗 日表达式:

$$L(\lbrace u_k \rbrace, \lbrace \omega_k \rbrace, \lambda) =$$

$$\alpha \sum_{k} || \partial_t \left[\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) \cdot u_k(t) \right] e^{-j\omega_k t} ||_2^2 + || f(t)$$

$$-\sum_{k} u_k(t) ||_2^2 + \left\langle \lambda(t), f(t) - \sum_{k} u_k(t) \right\rangle$$
(3)

采用乘法算子交替方向法 (alternate direction method of multipliers, ADMM) 求解该变分问题, 使 $u_k^{n+1} \propto \omega_k^{n+1} \pi \lambda_k^{n+1}$ 在计算中不断更新, 搜寻扩展拉格 朗日表达式的"鞍点"。 u_k^{n+1} 的取值方法如式(4)所示:

$$u_{k}^{n+1} = \underset{u_{k} \in X}{\operatorname{arg min}} \left\{ \alpha \sum_{k} \| \partial_{t} \left[\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) \cdot u_{k}(t) \right] e^{-j\omega_{k}t} \|_{2}^{2} + \| f(t) - \sum_{i} u_{i}(t) + \frac{\lambda(t)}{2} \|_{2}^{2} \right\}$$

$$\overrightarrow{\pi} + \cdot \quad \omega_{k} \stackrel{\text{(f)}}{=} \overrightarrow{\Pi} \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdot \sum u_{i}(t) \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdot \sum u_{i}(t) \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdot \sum u_{i}(t) \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdot \sum u_{i}(t) \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdot \sum u_{i}(t) \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots \stackrel{\text{(f)}}{=} \cdots$$

 $\sum_{i\neq k} u_i(t)^{n+1}$ 。对式(4)采用 Parseval/Plancherel 傅 里叶等距变换,从时域转变到频域,从而得到各模态 表达式在频域的更新:

(7)

$$\begin{cases} \hat{u}_{k}^{n+1}(\omega) = \\ \frac{\hat{f}(\omega) - \sum_{i < k} \hat{u}_{i}^{n+1}(\omega) - \sum_{i > k} \hat{u}_{i}^{n}(\omega) + \frac{\hat{\lambda}(\omega)}{2} \\ 1 + 2\alpha(\omega - \omega_{k}^{n})^{2} \\ \omega_{k}^{n+1} = \frac{\int_{0}^{\infty} \omega \mid \hat{u}_{k}^{n+1}(\omega) \mid^{2} d\omega}{\int_{0}^{\infty} \mid \hat{u}_{k}^{n+1}(\omega) \mid^{2} d\omega} \\ \hat{\lambda}^{n+1}(\omega) \leftarrow \hat{\lambda}^{n}(\omega) + \tau(\hat{f}(\omega) - \sum_{k} \hat{u}_{k}^{n+1}(\omega)) \end{cases}$$
(5)

1.2 基于 VMD 的时频分析方法理论

通过 1.1 节介绍的 VMD 将初始信号分解为不同 的 IMF 分量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$, 对每一个分量 $u_k(t)$ 进行希尔伯特变换得:

$$U_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_k(t)}{t - \tau} d\tau$$
(6)

 $u_k(t) 和 U_k(t) 形成了一个复共轭对,将其构造一个解析信号 <math>y_k(t)$:

$$y_k(t) = u_k(t) + jU_k(t) =$$

$$A_k(t)(\cos(f(t)) + i\sin(f(t))) - A_k(t)e^{jf_k(t)}$$

中的瞬时频率。其中, $A_k = \sqrt{u_k(t)^2 + U_k(t)^2}$, $\phi_k(t) = \arctan(\frac{U_k(t)}{u_k(t)})$, 瞬时频率 $\omega_k(t) = \frac{d\phi_k(t)}{dt}$ 。

将每一个 IMF 变换得到的解析信号进行叠加, 实部即为原始信号 *f*(*t*)。故信号由瞬时频率表示为:

$$f(t) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{K} A_k(t) e^{j\phi(t)} = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{K} A_k(t) e^{j\int \omega_k(t) dt}$$
(8)

Re 表示取实部,式(7)右端即为希尔伯特谱。 它表示瞬时振幅在频率-时间平面上的分布,记作:

$$H(\omega,t) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{K} A_k(t) e^{j \int \omega_k(t) dt}$$
(9)

2 仿真算例

为验证该时频分析方法的正确性,构造仿真信号 f,由三部分组成,如式(9)所示:

$$\begin{cases} v_1 = \sin(4\pi t), & v_2 = \cos(10\pi t + \sin(2\pi t)) \\ v_3 = \sin(20\pi t + 2\pi t^2), & f = v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$
(10)

式中: v₁是频率为 2 Hz 的正弦信号; v₂是余弦 调频信号, 频率随时间成正弦波动, 其频率值以 5 Hz 为中心, 在 4~6 Hz 之间成余弦波动; v₃为正弦扫频 信号, 频率从 10 Hz 起, 呈 2 Hz/s 线性增加。构造的 仿真信号时间为 6 s, 仿真信号 f 的时域波形如图 1 所示。



采用 VMD 对原信号进行分解,模态数 K 取 5。 VMD 分解信号的频谱与仿真信号的对比如图 2 所示, 其中黑色虚线为仿真信号频谱。从频谱中能清晰看到 该信号第一个组分的主频为 2 Hz,第二个组分信号 5 Hz 及其变化边界 4 Hz 和 6 Hz,还有第三个组分信 号从 10 Hz 变化到 22 Hz 的谱图。此外,还有信号中 没出现过的 3 Hz 和 7 Hz 的"伪"谐波分量。



图 2 VMD 分解频谱与仿真信号对比 Fig.2 Comparison between the frequency spectrum decomposed by VMD and the simulation signal

由于设置模态数为 5, 故 VMD 分解出了 u₁~u₅ 共 5 个谐波分量,结果如图 3 所示。图 3 第一行为原 始信号波形,之后从上到下依次为 VMD 分解得到的 谐波分量与原始信号分量的对比。其中,虚线显示的 是原信号分量的波形,实线为 VMD 分解的波形。可 见,VMD 准确地分解出了前两个组分信号,对应了 原信号中的 v₁和 v₂。v₃是频率变化很快的扫频信号, VMD 分了 3 次对该信号进行了分解。u₃、u₄和 u₅分 别对应了该信号的不同频率段的波形,但都与 v₃ 对 应段的波形吻合良好。

VMD 方法的时频分析如图 4 所示, 描绘了信号





不同组分的频率随时间的变化。为了对比,采用小波 分析的方法也对这段信号进行了时频分析,分辨率取 0.2 Hz,如图 5 所示。可见,基于 VMD 的时频分析 方法可以很好地展示出原非平稳信号的时频特征,包 括频率随时间线性增长和正弦波动的特性,而小波分 析无法描绘出频率呈正弦变化的过程,得到的频带也 不够清晰。

3 试飞应用

某型飞机在某高度跨音速飞行时,给外挂物上施 加侧脉冲激励,外挂物的振动响应并未衰减,而是出 现等幅振荡的异常现象。施加激励后外挂物的时域振 动如图 6 所示。



Fig.6 Vibration time history of the aircraft stores

将时域信号放大,可见在整个振荡过程信号波形 有变化。为研究其非平稳的变化特性,采用 VMD 时 频分析方法对典型的不同特性的三段信号进行分析。 第一段为 0~3 s (如图 7 所示),可见, VMD 方法完 全捕捉到了所有的频率成分。从时域波形看出,在 0.3 s 时施加的激励,从时频图中可见,在施加激励前 9Hz频率就存在,对应了外挂物的侧平振动。施加激 励后,其振幅逐渐衰减,而17.5 Hz的振动是在施加 激励后才被激发出来,对应了外挂物的偏航振动,伴 随出现的还有它的2倍频。第二段为7.8~10.3 s数据 (如图 8 所示),可见 9 Hz 模态已消失,只有 17.5 Hz 模态及2倍频存在。第三段为18~21.3 s数据(如图 9 所示),该段信号时域幅值略有增大,且波形有明 显变化,波峰与波谷出现许多锯齿,类似多频率的叠 加现象。从频谱图和时频谱图可见,该段只呈现外挂 物偏航振动,同时出现了其2倍频和3倍频,且偏航 振动频率由最初的 17.5 Hz 左右变为了 16 Hz 左右。 即脉冲激励后,主要呈现的是外挂物的持续偏航振 动,随着时间的推移,其倍频振动也越发显著,振幅 在后期还有增大趋势,直到飞机减速爬升,退出异常 振动过程,该振动才衰减。由此,通过基于 VMD 的 时频分析可以清楚详细地分析出外挂物以偏航振动 为主导的极限环振荡过程,找到了故障的来源,为解 决异常振动问题提供支撑。

Fig.7





spectrum decomposed by VMD and intercepted spectrum; c) time frequency analysis based on VMD





Fig.8 Analysis results of the first 7.8~10.3 s: a) time domain signal of interception section; b) comparison between signal spectrum decomposed by VMD and intercepted spectrum; c) time frequency analysis based on VMD





4 结论

1)基于 VMD 的时频分析方法能细致清晰地展示出非平稳信号的时频特性,有较高聚集度。

2)该方法在实际颤振试飞数据处理应用中取得 了良好效果。对于飞行异常振动数据,有助于分析试 飞故障来源,为后续问题解决提供支撑。

参考文献:

[1] 周友明. 颤振飞行试验非平稳信号处理方法研究[C]// 第十一届全国空气弹性学术交流会论文集. 昆明: 中

国空气动力学会, 2009.

ZHOU You-ming. Study on Non-stationary Signal Processing Method for Flutter Flight[C]// The 11th National Aeroelastic Academic Conference. Kunming: China Aerodynamics Society, 2009.

- [2] 唐炜, 史忠科. 时频域滤波及在飞机颤振试飞试验中的应用[J]. 振动与冲击, 2006, 25(4): 46-49.
 TANG Wei, SHI Zhong-ke. Frequency Response Function Estimation Using Tine-frequency Domain Filtering and Application to Flight Flutter Testing[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25 (4): 46-49.
- [3] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for

Nonlinear and Non-stationary Time Series Analysis[J]. Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1998, 454(1971): 903-995.

- [4] SMITH J S. The Local Mean Decomposition and Its Application to EEG Perception Data[J]. Journal of the Royal Society Interface, 2005, 2(5): 443-454.
- [5] WU Z H, HUANG N E. Ensemble Empirical Mode Decomposition: A Noise Assisted Data Analysis Method[J]. Advances in Adaptive Data Analysis, 2019, 1(1): 1-41.
- [6] WANG L, LIU Z, MIAO Q, et al. Time-Frequency Analysis Based on Ensemble Local Mean Decomposition and Fast Kurtogram for Rotating Machinery Fault Diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 103: 60-75.
- [7] DRAGOMIRETSKIY K, ZOSSO D. Variational Mode Decomposition[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(3): 531-544.
- [8] 武英杰.基于变分模态分解的风电机组传动系统故障 诊断研究[D].北京:华北电力大学,2016.
 WU Ying-jie. Research on Fault Diagnosis of Wind Turbine Drive System Based on Variational Mode Decomposition[D]. Beijing: North China Electric Power University, 2016.
- [9] 武英杰, 甄成刚, 刘长良, 等. 变分模态分解在风电机 组故障诊断中的应用[J]. 机械传动, 2015, 39(10): 129-132.

WU Ying-jie, ZHEN Cheng-gang, LIU Chang-liang, et al. Application of Variational Mode Decomposition in Wind Power Fault Diagnosis[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(10): 129-132.

- [10] 吴文轩, 王志坚, 张纪平, 等. 基于峭度的 VMD 分解 中 k 值的确定方法研究[J]. 机械传动, 2018, 42(8): 153-157.
 WU Wen-xuan, WANG Zhi-jian, ZHANG Ji-ping. Research of the Method of Determining k Value in VMD Based on Kurtosis[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(8): 153-157.
- [11] LI Z, CHEN J, ZI Y, et al. Independence-oriented VMD to Identify Fault Feature for Wheel Set Bearing Fault Diagnosis of High Speed Locomotive[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85: 512-529.
- [12] ZHANG S, WANG Y, HE S, et al. Bearing Fault Diagnosis Based on Variational Mode Decomposition and Total Variation Denoising[J]. Measurement Science and Technology, 2016, 27(7): 075101.
- [13] XUE Ya-juan, CAO Jun-xing, WANG Da-xing, et al. Application of the Variational Mode Decomposition for Seismic Time-Frequency Analysis[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2016, 9(8): 3821-3831.

- [14] 赵岩,朱均超,张宝峰,等. 基于 VMD 与 Hilbert 谱的 旋转机械碰摩故障诊断方法[J]. 振动、测试与诊断, 2018, 38(2): 381-386.
 ZHAO Yan, ZHU Jun-chao, ZHANG Bao-feng, et al. Rub-impact Fault Diagnosis of Rotating Machinery Based on VMD and Hilbert Spectrum[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(2): 381-386.
- [15] 唐贵基, 王晓龙. 参数优化变分模态分解方法在滚动 轴承早期故障诊断中的应用[J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(5): 73-81.
 TANG Gui-ji, WANG Xiao-long. Parameter Optimized Variational Mode Decomposition Method with Application to Incipient Fault Diagnosis of Rolling Bearing[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2015, 49(5): 73-81.
- [16] 赵昕海,张术臣,李志深,等. 基于 VMD 的故障特征 信号提取方法[J]. 振动、测试与诊断, 2018, 38(1): 11-19.
 ZHAO Xin-hai, ZHANG Shu-chen, LI Zhi-shen, et al. Application of New Denoising Method Based on VMD in Fault Feature Extraction[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(1): 11-19.
- [17] 陈立军,张海勇,韩东. 基于 VMD 和 HSA 的水声跳频 信号时频分析方法[J]. 科学技术与工程, 2015, 15(28): 165-169.
 CHEN Li-jun, ZHANG Hai-yong, HAN Dong. Time-Frequency Analysis of Underwater Acoustic Frequency-Hopping Signals Based on VMD and HAS[J]. Science Technology and Engineering, 2015, 15(28): 165-169.
- [18] 刘长福,朱立达,仇健,等.基于VMD和FFT的变切深侧铣颤振特征提取方法[J].东北大学学报,2018,39(8):1153-1157.
 LIU Chang-fu, ZHU Li-da, QIU Jian, et al. Chatter Feature Extraction Method in Variable Cutting Depth Flank Milling Based on VMD and FFT[J]. Journal of Northeastern University, 2018, 39(8):1153-1157.
- [19] 赵洪山, 郭双伟, 高夺. 基于奇异值分解和变分模态分解的轴承故障特征提取[J]. 振动与冲击, 2016, 35(22): 183-188.

ZHAO Hong-shan, GUO Shuang-wei, GAO Duo. Fault Feature Extraction of Bearing Faults Based on Singular Value Decomposition and Variational Modal Decomposition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(22): 183-188.

[20] 郑近德,潘海洋,杨树宝,等.广义变分模态分解方法 及其在变工况齿轮故障诊断中的应用[J].振动工程学 报,2017,30(3): 502-509.

ZHENG Jin-de, PAN Hai-yang, YANG Shu-bao, et al. Generalized Variational Mode Decomposition and Its Applications to Gear Box Fault Diagnois under Variable Conditions[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(3): 502-509.