

基于D优化方法的CSADT设计

韩少华¹, 葛蒸蒸², 姜同敏², 李晓阳²

(1. 中国兵器工业第203研究所, 西安 710065;
2. 北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院, 北京 100191)

摘要: 考虑到试验设计人员更关注模型参数的估计精度, 而传统试验优化方法以产品可靠性与寿命相关参数的预测精度为目标, 提出将D优化方法引入恒定应力加速退化试验(CSADT)设计中。首先, 用随机过程描述CSADT中产品性能退化的过程, 通过对数似然函数, 推导Fisher信息矩阵, 基于D优化方法建立优化目标, 以试验费用为约束条件, 明确优化问题, 给出最优试验变量: 各应力水平、各应力下样本分配和试验时间分配。然后, 应用该方法给出仿真实例。最后, 通过模型参数偏差的敏感性分析, 说明在一定偏差范围内, 优化结果具有良好的稳健性。

关键词: 加速退化试验; 试验设计; D优化方法; 稳健性分析

中图分类号: TB114.3 **文献标识码:** A

文章编号: 1672-9242(2012)04-0082-06

Planning of CSADT Based on D Optimization

HAN Shao-hua¹, GE Zheng-zheng², JIANG Tong-min², LI Xiao-yang²

(1. No.203 Research Institute of China Ordnance Industries, Xi'an 710065, China;
2. School of Reliability and System Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Considering designers' interests in accuracy estimation of model parameters, D optimization was proposed to design CSADT (Constant Stress Accelerated Degradation Testing), while traditional optimization method aims at the prediction accuracy of parameters related to reliability and lifetime of products. Stochastic process was used to describe a typical CSADT problem. The optimization problem was established by defining Fisher information matrix based on log-likelihood function. Under the constraint that the total experimental cost does not exceed a predetermined budget, optimization test variables, including stress levels, sample size, and testing time, at each stress level are given. Simulation examples were presented to demonstrate the proposed method. Sensitivity analyses showed that the optimization plan is robust within acceptable difference from the assumed value of parameters.

Key words: accelerated degradation testing; design of experiment; D optimality; robustness analysis

加速退化试验(ADT, Accelerated Degradation Testing)是解决长寿命、高可靠性产品寿命与可靠性评估问题的关键技术。为了在有限经费的约束下, 减少误差并提高评估精度, 需要对ADT进行优化设计。

收稿日期: 2012-02-25

作者简介: 韩少华(1972—), 男, 山西五台人, 硕士, 工程师, 主要研究方向为可靠性工程技术。

计,使试验的效果及信息的利用达到最优。针对试验设计人员关注点的不同,Ng^[1]等将加速试验优化设计准则分为两类:准则I,关注产品可靠性与寿命相关参数的预测精度,以该参数的渐进方差(均方误差等)最小为目标;准则II,关注模型未知参数的估计精度,以模型参数估计方差最小为目标,主要是D优化。目前ADT优化设计的文献中多数是基于准则I进行研究的^[2-10]。

D优化最大化信息矩阵的行列式的值,由于信息矩阵与方差-协方差矩阵互逆,因此同时最小化了方差-协方差矩阵的行列式值。在ALT设计中,D优化方法已应用较广^[11]。这两种准则同样适用于ADT,当试验设计人员更关注模型参数估计精度时,则应采用D优化。恒定应力加速退化试验(CSADT, Constant Stress Accelerated Degradation Testing)是一类技术更为成熟且应用更为广泛的ADT,在费用较为充足的情况下,工程人员更倾向于选择实施CSADT。因此,文中采用D优化方法设计CSADT方案。

1 试验过程

选择 K 个加速应力水平 S_1, S_2, \dots, S_K ,它们都高于正常应力水平 S_0 ,低于产品的工作极限应力 S_{max} ,一般有 $S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_K < S_{max}$ 。将总数量为 n 的样本分为 K 组,每组在一个加速应力水平下进行退化试验,第 k 个应力下的样本分配比为 p_k ,即样本量 $n_k = n \cdot p_k$,为具有统计意义, n_k 应不小于3。总试验时间为 t ,第 k 个应力下的试验时间分配比为 r_k ,则试验时间为 $t_k = t \cdot r_k (k=1, \dots, K)$,令产品性能监测时间间隔为 Δt ,则性能监测次数 $M_k = t_k / \Delta t$ 。试验剖面如图1所示。

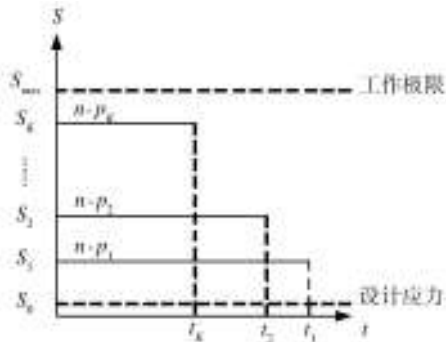


图1 CSADT剖面

Fig. 1 CSADT profile

加速退化试验是根据高应力下产品的性能退化数据,外推正常应力下产品的寿命与可靠性,包含两个维度的“外推”:1)应力上的外推,即由高应力下产品性能数据外推正常应力下产品的寿命与可靠性;2)时间上的外推,即由产品性能退化趋势外推产品失效时间。为保证应力外推的可行性和精度,应力水平数 K 一般取值2~5。 K 太小,则外推精度低; K 太大,则试验成本高。需综合试验费用、设备等情况确定 K 值。为保证时间外推的精度,应结合试验费用和产品性能退化情况,合理确定每一应力下的试验时间。

2 优化问题

2.1 随机过程模型

文中采用漂移布朗运动描述产品的性能退化过程,模型假设如下:1)产品的性能退化过程具有单调性,即性能发生的退化不可逆;2)在不同应力水平下,产品性能的随机变量均服从同一参数族分布,即每个应力水平下,产品的失效机理不变;3)产品的残余寿命仅依赖于当时已累积失效部分和当时应力水平,而与累积方式无关。模型表达如式(1)所示^[1]。

$$Y(t) = \sigma B(t) + d(s) \cdot t + y_0 \quad (1)$$

式中: $Y(t)$ 为产品性能退化过程,是一个漂移布朗运动; $B(t)$ 均值为0,方差为时间 t 的标准布朗运动, $B(t) \sim N(0, t)$; σ 为扩散系数,是大于0的常数,描述个体差异、操作和环境条件引起的差异等,因此假设 σ 不随应力和时间而改变; y_0 为漂移布朗运动的起始点,即产品性能初始值; $d(s)$ 为漂移系数,也可称为性能退化率,它是一个与应力相关的确定性函数,是加速模型。

文中假定 $d(s)$ 为Arrhenius模型,加速应力为温度,即:

$$d(S_k) = \exp [A + B / (S_k + 273.15)] \quad (2)$$

式中: A 为常数; $B = -E_a/k$, k 是波尔兹曼常数, E_a 是激活能(单位为eV); S_k 这里代表温度,单位为 $^{\circ}\text{C}$ 。

2.2 优化目标

设 K 个应力水平的CSADT,第 k 个应力水平下第 i 个样本的第 j 次性能监测时间为 $t_{kij} (k=1, \dots, K;$

$i=1, \dots, n_k; j=1, \dots, M_k$), 监测到的性能值为 y_{kij} 。布朗运动是高斯过程, 因此性能增量 $\Delta D (=y_{kij}-y_{ki(j-1)})$ 独立且服从正态分布, 即 $\Delta D \sim N(d(s) \Delta t, \sigma^2 \Delta t)^{[12]}$ 。独立增量的概率密度和对数似然函数分别为式(3)

$$\ln L \propto -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{M_i} \left\{ [\ln (2\pi\Delta t) + \ln \sigma^2] + \frac{[\Delta D_{kij} - d(S_k) \cdot \Delta t]^2}{\sigma^2 \Delta t} \right\} \quad (4)$$

基于信息的优化方法关注于模型参数的评估精度, D优化最大化 Fisher 信息矩阵的行列式的值, 其目标函数为:

$$\max \det[\mathbf{F}(\theta)] \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\theta) = \frac{nt}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K p_k r_k \exp(2A + 2B/S_k) & \sum_{k=1}^K p_k r_k \frac{\exp(2A + 2B/S_k)}{S_k} & 0 \\ \sum_{k=1}^K p_k r_k \frac{\exp(2A + 2B/S_k)}{S_k} & \sum_{k=1}^K p_k r_k \frac{\exp(2A + 2B/S_k)}{S_k^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^K \frac{p_k r_k}{2\sigma^2 \Delta t} \end{bmatrix} = \frac{nt}{\sigma^2} \mathbf{I}(\theta) \quad (6)$$

$$|\mathbf{F}(\theta)| = \frac{(nt)^3}{2\sigma^8 \Delta t} \times \left[\sum_{k=1}^K p_k r_k \times (I_{11}I_{22} - I_{12}^2) \right] = f(n, t, \Delta t) \times g(p_k, r_k, S_k) \quad (7)$$

可以看出, 总样本量 n 和总试验时间 t 对 Fisher 信息矩阵行列式的值 $|\mathbf{F}(\theta)|$ 影响很大, 样本量和试验时间受制于试验费用, 因此试验费用越高, 评估精度也越高。 $|\mathbf{F}(\theta)|$ 可分解为两部分: $f(n, t, \Delta t)$ 和 $g(p_k, r_k, S_k)$ 。如何合理确定这些变量使 $|\mathbf{F}(\theta)|$ 最大, 是文中要解决的问题。

2.3 约束条件

约束条件可分为试验费用约束和试验变量实际取值范围约束。试验费用分为样本费用和试验实施费用, 则有:

$$t \cdot C_0 + n \cdot C_d \leq C_i \quad (8)$$

式中: C_i 为试验总成本; C_0 为单位时间内实施试验的费用, 含监测费用、人员工资、设备耗损等; C_d 为样本单价。

试验变量实际取值范围可归纳为: 1) $S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_K \leq S_{\max}$; 2) $1 > r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_K > 0, \sum_{k=1}^K r_k = 1, t_k = t \times r_k$, 为确保每一应力下获得足够的信息量, 低应力下的试验时间应比高应力下的长; 3) $p_k \geq 3/n, \sum_{k=1}^K p_k = 1 (k=1, 2, \dots, K)$ 。

综上, 优化问题可描述为:

和(4)。其中, 未知参数 $\theta=(A, B, \sigma)$ 。

$$f(\Delta D) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{[\Delta D - d(S_k) \cdot \Delta t]^2}{2\sigma^2 \cdot \Delta t} \right\} \quad (3)$$

$[\mathbf{F}(\theta)]$ 的元素 $F_{ij} = E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j} \right)$ 。推导得式

(6)和(7):

$$\begin{aligned} \max \quad & |\mathbf{F}(\theta)| = f(n, t, \Delta t) \times g(p_k, r_k, S_k) \\ & t \cdot C_0 + n \cdot C_d \leq C_i \\ & S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_K \leq S_{\max} \\ & 1 > r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_K > 0, \sum_{k=1}^K r_k = 1 \\ & p_k \geq 3/n, \sum_{k=1}^K p_k = 1 (k=1, 2, \dots, K) \end{aligned} \quad (9)$$

3 优化算法和仿真算例

3.1 优化算法

分析式(9)可以看出, 该优化问题实际为两个优化问题, 如式(10)和(11):

$$\begin{aligned} \max \quad & f(n, t, \Delta t) \\ & t \cdot C_0 + n \cdot C_d \leq C_i \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & g(p_k, r_k, S_k) \\ & S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_K \leq S_{\max} \\ & 1 > r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_K > 0, \sum_{k=1}^K r_k = 1 \\ & p_k \geq 3/n, \sum_{k=1}^K p_k = 1 (k=1, 2, \dots, K) \end{aligned} \quad (11)$$

针对式(10), 可很容易从式(12)得知, Δt 取单位时间, $n=C_i/(2C_d), t=(C_i-n \times C_d)/C_0$ 时, f 为最大值。

$$f(n, t, \Delta t) = \frac{(nt)^3}{2\sigma^8 \Delta t} = \frac{1}{2\sigma^8 \Delta t} \left\{ -\frac{C_d}{C_o} \left[\left(n - \frac{C_i}{2C_d} \right)^2 + \left(\frac{C_i}{2C_d} \right)^2 \right] \right\}^3 \quad (12)$$

针对式(11),首先确定模型参数值 A, B 和 σ , 应力水平数 K ,正常应力 S_0 及最高应力水平 S_k ;然后找出满足约束条件的所有应力组合 $S_1, S_2, \dots, S_K \in \Omega_s$,所有时间分配比例组合 $r_1, r_2, \dots, r_K \in \Omega_r$,以及样本分配组合 $p_1, p_2, \dots, p_K \in \Omega_p$,构成方案集合 D ,即 $\Omega_s \times \Omega_r \times \Omega_p$,通过三重循环,对方案集合 D 中所有方案,计算 $g(p_k, r_k, S_k)$,取函数 g 最大值的方案作为最优方案。

3.2 仿真算例

基于上述优化模型和算法,通过仿真算例说明基于D优化方法的CSADT优化程序。假设对受试产品进行敏感应力分析,确定试验应力为温度,产品正常工作温度为 $25\text{ }^\circ\text{C}$,工作极限略高于 $110\text{ }^\circ\text{C}$,令试验最高应力水平 $S_k=110\text{ }^\circ\text{C}$ 。对试验进行优化设计前,根据产品设计信息、工程人员经验等确定模型未知参数 θ 。 θ 的估计值见表1,试验成本上限 C_i 、试验实施单价 C_o 和样本单价 C_d 见表2。

表1 模型参数值

Tab. 1 Value of parameters

A	E_d/eV	σ
12	0.65	0.002

表2 试验费用构成

Tab. 2 Cost of configuration

C_i	C_d	C_o
200×10^3 元	5×10^3 元/件	0.3×10^3 元/h

首先根据式(12)计算得到 $n=C_i/(2C_d)=20$ 件, $t=(C_i-n \times C_d)/C_o=333\text{ h}$, $\Delta t=1\text{ h}$,实际费用为 199.9×10^3 元,则 $f(n, t, \Delta t) = 5.77 \times 10^{32}$ 。然后根据式(11)确定变量 p_k, r_k, S_k 。在寻找满足约束条件的所有 p_k 组合中,令搜索步长为 $1/n$;在寻找满足约束条件的所有 r_k 组合中,为缩短优化时间,令搜索步长为 0.1 ;在寻找满足约束条件的所有 S_k 组合中,为缩短优化时间,令搜索步长为 $5\text{ }^\circ\text{C}$ 。优化结果见表3。通过减小搜索步长可获得更为精确的结果,表4是将应力步长缩短为 $1\text{ }^\circ\text{C}$ 时的优化结果。

表3 应力搜索步长为 $5\text{ }^\circ\text{C}$ 的优化结果

Tab. 3 Optimization results when stress step is $5\text{ }^\circ\text{C}$

K	S_1, \dots, S_K	p_1, \dots, p_K	n_1, \dots, n_K	r_1, \dots, r_K	t_1, \dots, t_K	$g \times 10^{25}$	$ \mathbf{F}(\theta) \times 10^{-8}$
2	90,110	0.5,0.5	10,10	0.5,0.5	167,166	32.7	18.85
3	90,105,110	0.55,0.15,0.30	11,3,6	0.6,0.2,0.2	200,67,66	10.4	6.01
4	90,95,105,110	0.35,0.20,0.20,0.25	7,4,4,5	0.4,0.2,0.2,0.2	133,67,67,66	3.37	1.94

表4 应力搜索步长为 $1\text{ }^\circ\text{C}$ 的优化结果

Tab. 4 Optimization results when stress step is $1\text{ }^\circ\text{C}$

K	S_1, \dots, S_K	p_1, \dots, p_K	n_1, \dots, n_K	r_1, \dots, r_K	t_1, \dots, t_K	$g \times 10^{25}$	$ \mathbf{F}(\theta) \times 10^{-8}$
2	90,110	0.5,0.5	10,10	0.5,0.5	167,166	32.9	18.97
3	91,109,110	0.50,0.35,0.15	10,7,3	0.5,0.4,0.1	167,133,33	13.7	7.93
4	91,108,109,110	0.35,0.20,0.20,0.25	7,4,4,5	0.6,0.2,0.1,0.1	200,67,33,33	4.43	2.56

从表3和表4可以看出:

1) 文中基于D优化方法,通过在满足约束条件的决策变量的取值空间内寻优,得到变量的最优解。优化目标Fisher信息矩阵行列式的值 $|\mathbf{F}(\theta)|$

都大于 10^8 ,由于信息矩阵与方差-协方差矩阵互为倒数,因此模型参数方差小于 10^{-8} 。说明该方法可有效降低模型参数估计的误差,提高寿命与可靠性评估精度。

2) 2应力水平下, $|F(\theta)|$ 最大, 即评估精度最高。最高应力确定时, 不同应力水平数下, 最低应力相同。对多个水平, 最低应力水平 S_i 下的样本量最多, 试验时间最长。

3) 2应力水平的高应力和低应力下, 样本分配和试验时间分配相等。这是由于D优化试验设计的目的是最小化模型参数估计的不确定性, 基于D优化的加速试验设计存在这一特点^[12]。观测多应力水平的最优试验应力, 可分为高应力和低应力两类(如表3中的4应力水平, 可分90℃和95℃为低应力, 105℃和110℃为高应力), 两类应力水平下, 试验样本量和试验时间分配相近, 低应力下略多, 符合D优化设计试验项均分的特点。

4) 对比表3和表4可以看出, 细化应力搜索步长后, 评估精度略有增加, 但最高、最低应力外的其他应力与最高应力太接近, 不符合工程实际, 这其实是2应力水平下 $|F(\theta)|$ 达到最大值的一个变形, 实际是2应力水平。因此确定试验最优应力时, 可先确定最高、最低应力, 而后在最高、最低应力附近选择合适的温度作为其他应力水平, 确定应力水平后, 再对样本分配和试验时间分配进行寻优。例如, 针对表3中的3应力和4应力水平, 在低应力90℃附近选择85℃, 在高应力110℃附近选择105℃, 结果如表5所示, $|F(\theta)|$ 虽略有降低, 但也可以有效降低模型参数估计误差, 不失为一个合理的选择。

表5 合理改变应力水平的优化结果

Tab. 5 Optimization results when stress levels change

K	S_1, \dots, S_k	p_1, \dots, p_k	n_1, \dots, n_k	r_1, \dots, r_k	t_1, \dots, t_k	$g \times 10^{25}$	$ F(\theta) \times 10^{-8}$
3	85, 90, 110	0.40, 0.15, 0.45	8, 3, 9	0.4, 0.3, 0.3	133, 100, 100	9.08	5.238
4	85, 90, 105, 110	0.35, 0.20, 0.20, 0.25	7, 4, 4, 5	0.4, 0.2, 0.2, 0.2	133, 67, 67, 66	3.23	1.860

4 敏感性分析

试验优化设计是试验数据评估的逆过程。在设计试验方案时, 需根据产品设计信息、少量预试验及工程经验等, 预估模型参数 A, B, σ 。这些预估值与真实值之间会有一些偏差, 而模型参数估计值的不准确必然会影响试验优化设计的准确性。本节讨论试验优化结果对模型参数偏差的敏感性。假定模型参数的真值为上述算例中的初始值, 试验费用等信息也与算例一致, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 ε_3 分别代表模型参数 A, B, σ 的偏差, 根据在模型参数偏差范围内, 试验优化方案的变动情况, 来分析该方法是否具有良好的稳健性。以表3中3应力水平的最优方案为例, 每个参数不同偏差下的优化结果见表6, 可以看出, 在模型参数一定偏差范围内, 试验最优方案几乎不变, 说明该方法对模型参数偏差不敏感。

对于参数 A , 误差 ε_1 波动在 $\pm 50\%$ 范围内, 最优方案不变, 优化目标 $|F(\theta)|$ 的值随着 ε_1 增大(减小)而增大(减小); 对于参数 σ , 误差 ε_3 波动在 $\pm 50\%$ 范围内, 最优方案也不变, 优化目标 $|F$

$(\theta)|$ 的值随着 ε_3 增大(减小)而减小(增大); 对于参数 B , 误差 ε_2 波动在 $-50\% \sim +10\%$ 范围内, 最优方案不变, 优化目标 $|F(\theta)|$ 的值随着 ε_2 减小而增大, ε_2 增到 20% 时, 最低应力变为 95°C , 增到 50% 时, 最低应力变为 95°C 的同时, 样本分配也发生变动, 但此时 $|F(\theta)|$ 很小, 该优化方法已不适用。因此在模型参数一定偏差范围内, 基于D优化的ADT设计方法具有良好的稳健性。参数 $B = -E_a/k$, 其中 E_a 为激活能, 激活能增加时, 则需要更高的应力来激发产品内部化学反应, 加快性能退化, 因此最优方案中的应力水平 S_i 相对真值有所增加。由于激活能对优化方案的影响较大, 因此在试验设计前应重点分析, 以减少参数误差, 提高优化设计的准确性。

5 结论

1) 采用漂移布朗运动对产品性能退化过程建模, 基于D优化建立目标函数, 以试验费用和决策变量的实际取值范围为约束条件, 给出最优试验变量: 试验应力水平、每一应力水平下样本量和试验时间。

2) 通过算例验证了文中提出的方法, 说明该方

表6 模型参数不同偏差下CSADT的优化结果

Tab. 6 Optimization results for CSADT under different errors of model parameters

编号	ε_1	ε_2	ε_3	S_1	S_2	n_1	n_2	n_3	t_1	t_2	t_3	$ F(\theta) $
0	0	0	0	90	105	11	3	6	200	67	66	6.01×10^8
1	+10%	0	0	90	105	11	3	6	200	67	66	7.31×10^{10}
2	+50%	0	0	90	105	11	3	6	200	67	66	1.59×10^{19}
3	-10%	0	0	90	105	11	3	6	200	67	66	4.95×10^6
4	-50%	0	0	90	105	11	3	6	200	67	66	2.27×10^{-2}
5	0	0	+10%	90	105	11	3	6	200	67	66	2.81×10^8
6	0	0	+50%	90	105	11	3	6	200	67	66	2.35×10^7
7	0	0	-10%	90	105	11	3	6	200	67	66	1.4×10^9
8	0	0	-50%	90	105	11	3	6	200	67	66	1.54×10^{11}
9	0	+10%	0	90	105	11	3	6	200	67	66	1.83×10^5
10	0	+20%	0	95	105	11	3	6	200	67	66	5.86×10^1
11	0	+50%	0	95	105	10	3	7	200	67	66	1.98×10^{-9}
12	0	-10%	0	90	105	11	3	6	200	67	66	1.97×10^{12}
13	0	-50%	0	90	105	11	3	6	200	67	66	2.12×10^{19}

法可有效降低模型参数的估计误差,从而提高产品寿命和可靠性的评估精度。

3) 2应力水平的优化目标函数值比多应力水平的大,但为了保证应力外推的准确性,应力水平数应大于2。

4) D优化方法有均分试验项的特点,2应力水平下,样本量和试验时间相等;多应力水平可分为高、低应力两类,两类应力下,试验项分配近似相等。

5) 通过分析模型参数偏差对试验优化结果的影响,说明基于D优化的CSADT设计方法具有良好的稳健性。

参考文献:

- [1] NG H K T, BALAKRISHNAN N, CHAN P S. Optimal Sample Size Allocation for Tests with Multiple Levels of Stress with Extreme Value Regression[J]. Naval Research Logistics, 2007(54): 237—249.
- [2] LI Q S. Accelerated Degradation Test Planning and Optimization[D]. The University of Arizona: The Aerospace and Mechanical Engineering Department, 2002.
- [3] YU H F. Designing an Accelerated Degradation Experiment with a Reciprocal Weibull Degradation Rate[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2006, 136(1): 282—297.
- [4] YU H F, CHIAO C H. Designing an Accelerated Degradation Experiment by Optimizing the Interval Estimation of the Mean-time-to-failure[J]. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 2002, 19(5): 23—33.
- [5] POLAVARAPU I, OKOGBAA G. An Interval Estimate of

Mean-time-to-failure for a Product with Reciprocal Weibull Degradation Failure Rate[C]//Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium. Alexandria, VA United States: IEEE, 2005: 261—264.

- [6] TSENG S T, BALAKRISHNAN Narayanaswamy TSAI Chih-chun. Optimal Step-stress Accelerated Degradation Test Plan for Gamma Degradation Processes[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2009, 58(4): 611—618.
- [7] PARK J L, YUM B J. Optimal Design of Accelerated Degradation Tests under Step-stress Loading[J]. Bulletin of the International Statistical Institute, 2001, 3: 353—354.
- [8] PARK S J, YUM B J, BALAMURALI S. Optimal Design of Step-stress Degradation Tests in the case of Destructive Measurement[J]. Quality Technology & Quantitative Management, 2004, 1(1): 105—124.
- [9] LI X Y, JIANG T M. Optimal Design for Step-stress Accelerated Degradation Testing with Competing Failure Modes [C]//Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium. Fort Worth, Texas, USA: IEEE, 2009: 64—68.
- [10] GE Z Z, LI X Y, JIANG T M. Planning of Step-stress Accelerated Degradation Testing with Stress Optimization[C]// International Conference on Advances in Product Development and Reliability. Shenyang, China: [s. n.], 2010: 404—408.
- [11] GUO Huai-rui, PAN Rong. D-optimal Reliability Test Design for Two-stress Accelerated Life Tests[C]// International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management. Singapore: IEEE, 2007: 1236—1240.
- [12] CHHIKARA R S, FOLKS J L. The Inverse Gaussian Distribution[M]. New York: Marcel Dekker, 1989.