

两点激励中相关系数的影响

农绍宁，赵怀耘

(中国工程物理研究院 总体工程研究所, 四川 绵阳 621900)

摘要: 目的 用谱函数分析的方式, 推导结构在两点激励下的随机振动响应的计算公式。方法 通过互谱与相关系数的关系, 讨论结构在两点激励下的响应特点。结果 对于线性结构, 不同相关系数的两点激励下结构激发的模态效果不同, 随着相关系数的增大, 结构的响应在相邻的谐振峰上, 出现增大、减小交替出现的现象。结论 相关系数对结构响应影响的特点, 应该引起工程结构设计人员的重视。

关键词: 两点激励; 相关系数; 随机振动

DOI: 10.7643/ issn.1672-9242.2017.08.006

中图分类号: TJ01; O322 **文献标识码:** A

文章编号: 1672-9242(2017)08-0030-04

Influences of Correlation Coefficient in Two-point Excitations

NONG Shao-ning, ZHAO Huai-yun

(Institute of Systems Engineering CAEP, Mianyang, 621900, China)

ABSTRACT: Objective The paper aims to derive the computational formula for random vibration response of structures under two-point excitations with spectrum function. **Methods** Response characteristics of the structural under two-point excitations were discussed with cross spectrum and correlation coefficient. **Results** For linear structures, the stimulated modal effects varied with different correlation coefficients under two-point excitations. With the increase of the correlation coefficient, the structural response spectrum increased and reduced alternately on adjacent resonance peaks. **Conclusion** Influences of structural vibration response character with different correlation coefficient should be worth of attention of the designers of engineering structures.

KEY WORDS: two-point excitation; correlation coefficient; random vibration

两点激励是多维激励的一种方式。对于大尺寸结构来说, 通常振动环境下结构前后端受到的激励差异较大, 利用多台振动器对试件进行多维振动激励方式是更为合理、有效的一种模拟试验方法。GJB 150.16A—2009 中对组合式飞机外挂实验也提出了多激励点的要求^[1]。由于多维振动与工程实际关系密切, 自 20 世纪 60、70 年代出现以来, 就涌现出许多文献对其进行了研究综述。文献[2]讨论了多轴振动环境试验条件的定义、技术关键以及多轴振动台和振动控制系统的介绍、应用。文献[3]阐述了多维振动试验

方法的原理、试验条件定义和试验控制算法。还有许多文献^[4—7]对大结构尺寸的具体工程结构进行了数值仿真和实验, 结果表明多维振动下结构的响应相对于一致激励有明显的差异, 总体上使结构的响应更为复杂。Hao^[8]也利用他自己提出的相干函数模型计算了圆拱的多点输入响应, 发现如果忽略地震动之间的相干, 则求得结构的响应有时偏高, 有时偏低, 但未能给出普遍的规律。

文中基于随机振动的理论, 用谱函数分析的方式, 推导结构在两点激励下的随机振动响应。利用互

谱与相关系数的关系, 讨论了结构在两点激励下不同相关系数的响应特点, 认为相关系数对结构的响应有较大的影响, 给出了一些有意义的结论。

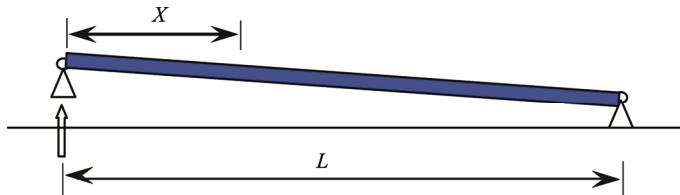


图 1 左支座基础激励

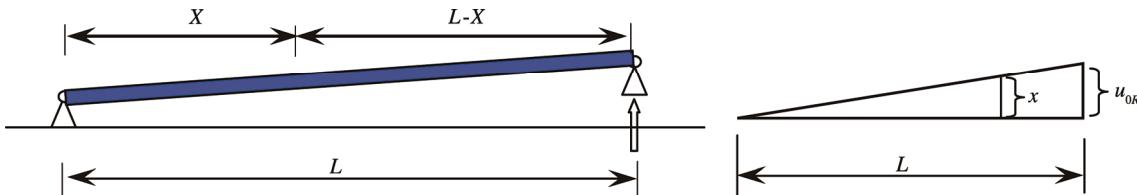


图 2 右支座基础激励

对于图 1 左支座基础激励, 左支座基础位移为 u_{0L} 时, 杆长 x 处静态位移为 $\frac{x}{L}u_{0L}$; 对于图 2 右支座基础激励, 右支座基础位移为 u_{0R} 时, 杆长 x 处静态位移为 $\frac{L-x}{L}u_{0R}$ 。

使用相对位移, 即设相对位移为 x , 动力学方程为:

$$\text{左端: } m\left(\ddot{x} + \frac{x}{L}\ddot{u}_{0L}\right) + C\dot{x} + \left[\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 EI\right]x = 0$$

$$\text{右端: } m\left(\ddot{x} - \frac{L-x}{L}\ddot{u}_{0R}\right) + C\dot{x} + \left[\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 EI\right]x = 0$$

式中: m 为单位长度质量; C 为阻尼系数; EI 为弯曲刚度; j 为第 j 阶模态。

质量归一化的模态为:

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$$

以左端为例:

$$m\left(\ddot{x} + \frac{x}{L}\ddot{u}_{0L}\right) + C\dot{x} + \left[\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 EI\right]x = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + C\dot{x} + \left[\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 EI\right]x = -m\frac{x}{L}\ddot{u}_{0L}$$

应用模态正交性(仍用变量 x 表示):

$$\Rightarrow \ddot{x}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{x}_j + \omega_j^2x_j =$$

方程的解为:

$$X(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)x_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{i\pi} \cos(i\pi)\ddot{u}_{0L}(t_L - \theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{i\pi} \ddot{u}_{0R}(t_R - \theta) d\theta \right]$$

方程两边取相关函数:

1 两点激励随机振动响应谱

为简化分析, 以长度为 L 的简支均匀梁位移响应为例说明, 如图 1、图 2 所示。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[\sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] \left[-m\left(\frac{x}{L}\ddot{u}_{0L}\right) \right] dx \\ & \Rightarrow \ddot{x}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{x}_j + \omega_j^2x_j = \\ & -\sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{mi\ddot{u}_{0L}}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\ & \Rightarrow \ddot{x}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{x}_j + \omega_j^2x_j = \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \ddot{u}_{0L} \cos(j\pi) \\ & \text{同理, 对于右端:} \\ & \Rightarrow \ddot{x}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{x}_j + \omega_j^2x_j = \\ & \int_0^L \left[\sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] \left[m\left(\frac{L-x}{L}\ddot{u}_{0R}\right) \right] dx \\ & \Rightarrow \ddot{x}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{x}_j + \omega_j^2x_j = \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \ddot{u}_{0R} \end{aligned}$$

两边同时激励时, 设左端激励加速度为 \ddot{u}_{0L} , 右端激励加速度为 \ddot{u}_{0R} , 则:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{x}_j + \omega_j^2x_j = \\ & \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \ddot{u}_{0L} \cos(j\pi) + \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \ddot{u}_{0R} \end{aligned}$$

应用杜哈曼积分:

$$\begin{aligned} x_j &= \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \cos(j\pi)\ddot{u}_{0L}(t_L - \theta) d\theta + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \ddot{u}_{0R}(t_R - \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X(x,t_1)X(x,t_2)] &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{i\pi} \cos(i\pi) \ddot{u}_{0L}(t_{1L}-\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{i\pi} \ddot{u}_{0R}(t_{1R}-\theta) d\theta \right] \right\}, \\
&\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \cos(j\pi) \ddot{u}_{0L}(t_{2L}-\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \ddot{u}_{0R}(t_{2R}-\theta) d\theta \right] \right\} = \\
&\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) E \left[\left[A_i \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \ddot{u}_{0L}(t_{1L}-\theta) d\theta + B_i \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \ddot{u}_{0R}(t_{1R}-\theta) d\theta \right] \cdot \right. \\
&\left. \left[A_j \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \ddot{u}_{0L}(t_{2L}-\theta) d\theta + B_j \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \ddot{u}_{0R}(t_{2R}-\theta) d\theta \right] \right] = \\
&\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) E \left[A_i A_j \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \ddot{u}_{0L}(t_{1L}-\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \ddot{u}_{0L}(t_{2L}-\theta) d\theta + \right. \\
&A_i B_j \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \ddot{u}_{0L}(t_{1L}-\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \ddot{u}_{0R}(t_{2R}-\theta) d\theta + B_i A_j \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \ddot{u}_{0R}(t_{1R}-\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\theta) \ddot{u}_{0L}(t_{2L}-\theta) d\theta + \\
&B_i B_j \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \ddot{u}_{0R}(t_{1R}-\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\theta) \ddot{u}_{0R}(t_{2R}-\theta) d\theta \left. \right]
\end{aligned}$$

方程两边做傅里叶变换：

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) \left[A_i A_j H_L^*(\omega) H_L(\omega) S_L(\omega) + A_i B_j H_L^*(\omega) H_R(\omega) S_{LR}(\omega) + \right. \\
&B_i A_j H_R^*(\omega) H_L(\omega) S_{RL}(\omega) + B_i B_j H_R^*(\omega) H_R(\omega) S_R(\omega) \left. \right]
\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{\sqrt{2mL}}{i\pi} \cos(i\pi), \quad A_j = \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi} \cos(j\pi), \quad B_i = \frac{\sqrt{2mL}}{i\pi}, \\
B_j &= \frac{\sqrt{2mL}}{j\pi}, \quad H_L(\omega) = H_R(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\omega}
\end{aligned}$$

式中：“*”代表共轭； $S_L(\omega)$ 为左端输入加速度谱； $S_R(\omega)$ 为右端输入加速度谱； $S_{LR}(\omega)$ 和 $S_{RL}(\omega)$ 为两端输入加速度互谱。

2 互相关系数与互谱

每个激励力函数，因为是随机过程 $X(t)$ ，在不同的时刻值是随机变量，总有自己的相关函数，也就是自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 。

同理，两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ ，它们在不同的时刻值是随机变量，可以定义这两个随机变量函数的二阶联合矩：

$$E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] = R_{xy}(t_1, t_2)$$

式中： $R_{xy}(t_1, t_2)$ 为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数。

定义无量纲的标准互相关函数：

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$$

式中： $\sigma_x(t_1)$ ， $\sigma_y(t_2)$ 为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的标准方差。

若互相关函数 $\rho_{xy}(t_1, t_2)$ 不恒等于零，则随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是相关的，若互相关函数 $\rho_{xy}(t_1, t_2)$ 恒等于零，则随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是不相关的。

对于各态历经的随机过程，随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$

的标准方差不随时间变化，为一个确定的值 σ_X 和 σ_Y 。随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数 $R_{XY}(t_1, t_2)$ 为时间差 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数，当时间差 τ 固定时，互相关函数 $R_{XY}(t_1, t_2)$ 为一确定的值 R_{XY} 。因此，同随机变量相似，互相关函数 $\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$ 为时间差 τ 的函数。

对比相干系数：

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega) S_y(\omega)}$$

两者是相似的，其中 $S_{xy}(\omega)$ 为 $R_{xy}(\tau)$ 的傅里叶变换。

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

因此相干系数也可以表征两个各态历经随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的相关程度。一般来说，相关程度越高，相干系数值越大， $S_{xy}(\omega)$ 的值也较大。

3 互相关系数的影响

忽略 $i \neq j$ 的交叉项影响，响应简化为：

$$\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2 |H(\omega)|^2 \frac{2mL}{(i\pi)^2} \cdot \\
&[\cos^2(i\pi) S_L(\omega) + 2 \cos(i\pi) \operatorname{Re}(S_{LR}(\omega)) + S_R(\omega)]
\end{aligned}$$

可见，响应与模态阶数 i 有关，还与互谱 $S_{LR}(\omega)$ 的大小有关。特别的，当两点激励完全相关时，则

$$\begin{aligned}
S_L(\omega) &= S_R(\omega) = S_{LR}(\omega), \text{ 响应 } S_x(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2 |H(\omega)|^2 \cdot \\
&\frac{2mL}{(i\pi)^2} S_L(\omega) [\cos(i\pi) + 1]^2. \text{ 在 } \cos(i\pi) = -1 \text{ 时，响应为 } 0.
\end{aligned}$$

4 工程实例

对某挂框式夹具进行了两点激励振动实验^[9]。挂框式夹具两点激励振动试验安装状态如图 3 所示, 测点布局如图 4 所示。

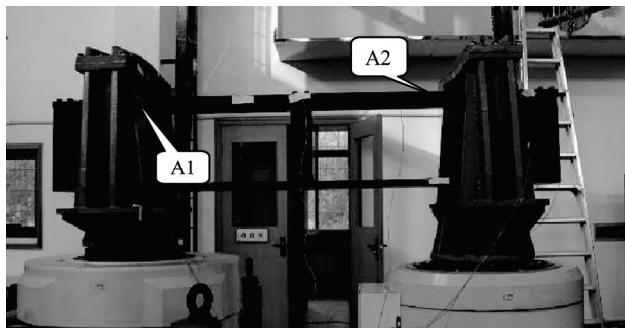


图 3 挂框式夹具两点激励振动实验安装状态

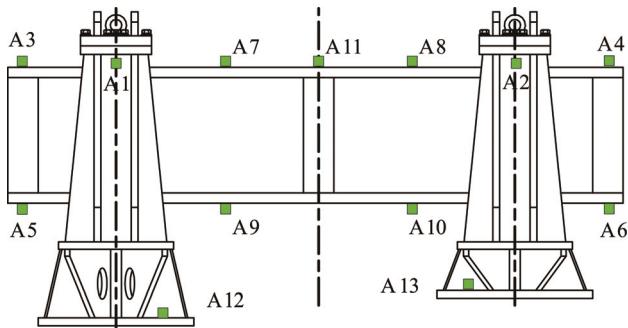


图 4 挂框式夹具两点激励振动实验加速度测点布局

分别设置了互谱 $S_{LR}(\omega)$ 为 0.0, 0.3, 0.5, 0.9, 以结构上 A5 测点为例, 不同的相关系数值, 即不同的相关系数下响应见图 5。在其中的一个谐振峰上, 随着相关系数的增大, 响应值越大; 而在相邻的谐振峰上, 随着相关系数的增大, 响应值越小。

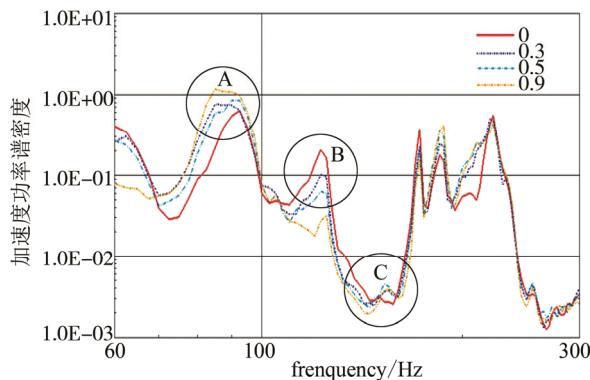


图 5 不同相关系数 A5 测点响应

根据理论计算结果, 结构在 143 Hz 附近有谐振响应, 但结构上(例如 A5 测点)在 143 Hz 附近响应很小(见图 5C 处), 对应了 $\cos(i\pi) = -1$ 时的结果, 如图 6 所示。

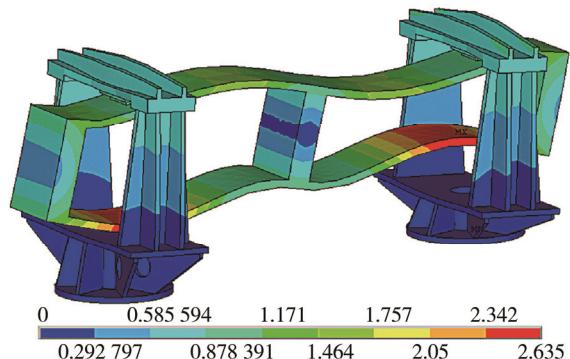


图 6 143 Hz 模态响应

5 结语

文中利用谱函数的形式, 给出了两点随机激励下结构响应的一些特点。从相关系数方面分析了结构响应差异的这一因素。随着相关系数的增大, 结构在相邻的谐振峰上, 响应随之增大、减小交替出现。在激励谱满足一定的条件下, 结构响应可能在某些模态的响应为 0。尽管提倡采用多点激励的方式以利于激发出更多的结构模态响应, 但也可能出现模态响应为 0 的现象。两点激励振动响应的这些特点可为工程结构设计人员提供参考。

参考文献:

- [1] GJB 150.16A—2009 军用装备实验室环境试验方法 第 16 部分: 振动试验[S].
- [2] 夏益霖. 多轴振动环境试验的技术、设备和应用[J]. 导弹与航天运载技术, 1996(6): 52-59.
- [3] 吴家驹, 荣克林. 多维振动环境试验方法[J]. 导弹与航天运载技术, 2003(4): 27-32.
- [4] 白凤龙, 李宏男. 地震动多点激励下大跨空间网架结构的反应分析[J]. 工程力学, 2010, 27(7): 67-73.
- [5] 武芳文, 薛成凤, 赵雷. 多维地震激励作用下大跨度斜拉桥的随机响应[J]. 武汉理工大学学报, 2010, 32(9): 344-347.
- [6] 柳国环, 李宏男, 田利. 九江长江大桥在多点多维地震激励下的反应分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(9): 204-209.
- [7] 陈颖, 田光明, 钟继根. 典型细长体结构的两点激励振动试验设计[J]. 航天器环境工程, 2013, 30(1): 68-71.
- [8] HAO H. Ground Motion Spatial Variation Effects on Circular Arch Response[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(11): 2326-2341.
- [9] 赵怀耘, 田光明, 钟继根. 两点激励振动试验时结构模态对控制效果的影响分析[J]. 装备环境工程, 2012, 9(6): 51-53.
- [10] GEORGE A H, RICHARD S S, MARCOS A U. A Review of Multiaxis/Multiexciter Vibration Technology[J]. Sound and Vibration, 1996(4): 20-27.
- [11] 王梦魁. 多维振动环境试验的实践[J]. 装备环境工程, 2005, 2(3): 23-25.
- [12] 美国 ANSYS 公司北京办事处. ANSYS 动力学分析指南 [K]. 北京: 美国 ANSYS 公司北京办事处, 2000.