

基于各向异性粒子介电常数张量重构的 散射特性研究

李瑾^{1,2}, 冯晓毅²

(1.陕西学前师范学院计算机与电子信息系, 西安 710100;

2.西北工业大学 电子信息学院, 西安 710072)

摘要: **目的** 简化各向异性介质中的光电传播、目标散射识别等问题。**方法** 基于电场强度矢量和电位移矢量的关系, 提出将各向异性介质的介电常数张量重构为对角张量通用方法。**结果** 给出了对角张量元素的表达式和对应单位特征矢量, 并作了详细的数值计算。得到了单位特征矢量坐标系中电磁场与原坐标系中电磁场的变换关系以及磁导率张量的变换关系; 所用方法具有通用性, 所得结果具有实用性。**结论** 在各向异性介质研究领域, 可实现特征坐标系中的电磁场及介质参数与主坐标系的电磁场与介质参数的相互定量转换。

关键词: 张量; 介质重构; 单位矢量; 变换关系

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2017.12.017

中图分类号: TJ01

文献标识码: A

文章编号: 1672-9242(2017)12-0088-05

Scattering Characteristics Based on Reconstruction of Permittivity Tensor for Anisotropic Particle

LI Jin^{1,2}, FENG Xiao-yi²

(1.Department of Physics and Electronic Engineering, Shaanxi Xueqian Normal University, Xi'an 710100, China;

2.College of Electronic Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

ABSTRACT: Objective To simplify the photoelectric transmission, target scattering etc. in anisotropic medium. **Methods** Based on relation between electric-field vector and electric displacement vector, reconstructing tensor of dielectric constant for anisotropic medial was proposed as the universal method for diagonal tensor. **Results** The element expressions and corresponding unit eigenvectors of diagonal tensor were developed with detailed numerical calculation. The transformation relation of electromagnetic field in the unit characteristic vector coordinates system and the primary coordinate system and the transformation relation of permeability tensor were presented. The method was universal and the result obtained was practical. **Conclusion** In the domain of anisotropic media, the result is able to quantitatively transform the E.M. field and medium parameter from the eigen coordinates system to the primary coordinates system and vice versa..

KEY WORDS: tensor; medium reconstruction; unite vector; transform relation

近年来,随着空间深度探测及现代隐身等技术的不断发展,对各向异性介质中光电传播及目标散射提

出了一系列新的要求。将一般介电常数张量重构为对角张量可以有效地解决各向异性介质中的相关课题,

收稿日期: 2017-09-27; 修订日期: 2017-11-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60971079); 陕西省教育厅自然科学基金资助项目(16JK1185)和陕西省自然科学基金基础研究项目(2014JM8312)

作者简介: 李瑾(1986—),女,陕西西安人,硕士,主要研究方向为光电散射与传播。

为相关现代技术发展提供理论支持,因而研究介电常数张量为对角张量的电磁问题受到人们的重视^[1-6]。当介电常数张量为对角张量时,其中的电磁波传播、反射等基本问题得到详细的解决^[7]。当对角张量的元素为负值时^[8],电磁波在强各向异性材料中传播的机制以及基于此原理的超透镜等问题已获得有效的解决。文献[9-10]基于假设的传播方向将介电常数张量分成纵向和横向两个张量,得到了电磁波在各向异性介质中的传播方程。当介电常数张量为对角张量,采用非标准单位制可以获得电磁理论中的基本定律如库仑定律的解析表达式以及各向异性介质球的内外电场分布^[11-12],文献[13]通过有限元数值模拟方法,讨论同时存在起伏地形以及电导率为对角张量时二维大地电磁测深法中 TM 极化模式的响应等。当介电常数张量为对角张量,可以得出其中电源辐射的解析表达式^[14]。总之,将介电常数张量重构为对角张量可以有效地解决各向异性介质中的光电问题,但如何具体地将任意的各向异性介质重构为介电常数张量为对角张量的介质未见详细的研究报道。另外,介质参数为对角张量下获得的电磁场与介质参数为非对角张量下的电磁场存在的定量关系,以及其他介质参数如磁导率张量等定量关系成为各向异性介质中电磁结果应用与工程实际的瓶颈问题。

文中首先将各向异性介质的介电常数张量重构为对角张量,给出特征坐标系中介电常数的张量表达式,并进行了数值计算与讨论。在笛卡尔坐标系中,给出了介质重构之前与重构之后两坐标系之间电磁场的转换关系、磁导率张量的转换关系等,最后对其他坐标系下如球坐标系如何转换介质的电磁参数以及电磁场做了简单地讨论。

1 各向异性介质电磁参数的重构研究

当各向异性介质为无损耗介质时,其介电常数张量为对称张量^[12],因此各向异性介质中,电位移矢量与电场强度矢量的关系可以写为:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为一对成矩阵,表达式为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

矩阵元素记为 ε_{0ij} ,采用爱因斯坦重复求和规定,式(1)可简写为

$$D_i = \varepsilon_{0ij} E_j \quad (2)$$

设在某一方向上,即:

$$D_i = \varepsilon_0 \lambda E_i \quad (3)$$

其中 λ 为一个待定的乘子。将式(2)代入式(3)可得:

$$\det[\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - \lambda I_{ij}] = 0 \quad (4)$$

其中 I_{ij} 是一个单位张量,当 $i=j$ 时, $I_{ij}=1$; 当 $i \neq j$ 时, $I_{ij}=0$ 。求解方程(4)可得三个特征根,记为 λ_k ($k=1, 2, 3$)。令:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} E_j^{(k)} = \lambda_k E_i^{(k)} \quad (5)$$

由式(5)就可求得 $E_i^{(k)}$ 的具体方向,这些求得的具体方向称为 λ_k 的本征矢量;同时(5)式还表明 λ_k 具有与 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 相同的单位和物理意义。当三个本征值不相等时,三个本征矢量相互正交。从式(4)出发,可得特征根的表达式:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b'}{3} \\ \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b'}{3} \\ \lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b'}{3} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $b' = -(a+b+c)$

$$p = (ab+bc+ac-e^2-f^2-d^2) - \frac{b'^2}{3}$$

$$q = be^2 + af^2 + cd^2 - 2fed - abc -$$

$$\frac{b'(ab+bc+ac-e^2-f^2-d^2)}{3} + \frac{2b'^3}{27}$$

式(6)表明,特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是相对介电常数张量元素的函数。将特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 代入式(5)可得到三个特征矢量:

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13}), \mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23}), \mathbf{v}_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$$

由于三个特征矢量互相正交而且是归一化矢量,将其选为新的笛卡尔坐标系的单位矢量,称这一新坐标系为特征坐标系。在该坐标系中,坐标与物理参数用上标“'”表示,各向异性介质的介电常数张量为对角张量,简记为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

为了直观起见,设相对介电常数张量为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2.5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2.5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

代入式(6)可得: $\lambda_1=1.8435$, $\lambda_2=3.4514$, $\lambda_3=9.7051$ 。

代入式(5)可得三个特征矢量,具体为: $\mathbf{v}_1 = (0.5709, 0.4633, -0.6778)$, $\mathbf{v}_2 = (-0.7089,$

0.6946, -0.1223), $\mathbf{v}_3 = (0.4142, 0.5503, 0.7250)$ 。

以上三个特征矢量互相正交, 且:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$$

由此可见: 可以定义一个特征坐标系

$$\mathbf{v}_1 \leftrightarrow x', \mathbf{v}_2 \leftrightarrow y', \mathbf{v}_3 \leftrightarrow z'。$$

2 主坐标系中电磁场与特征坐标系中电磁场的关系

三个特征矢量可以写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= v_{11}\hat{x} + v_{12}\hat{y} + v_{13}\hat{z} \\ \mathbf{v}_2 &= v_{21}\hat{x} + v_{22}\hat{y} + v_{23}\hat{z} \\ \mathbf{v}_3 &= v_{31}\hat{x} + v_{32}\hat{y} + v_{33}\hat{z} \end{aligned} \quad (8)$$

设 $\mathbf{B}$ 为主坐标系中的磁感应强度矢量, 在主坐标系与特征坐标系的表达式分别为:

$$\mathbf{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$$B_e = B_1v_1 + B_2v_2 + B_3v_3$$

则

$$\begin{aligned} B_x &= \mathbf{B} \cdot \hat{x} = B_e \cdot \hat{x} = (B_1v_1 + B_2v_2 + B_3v_3) \cdot \hat{x} \\ &= B_1v_{11} + B_2v_{21} + B_3v_{31} \end{aligned}$$

同法可得:

$$B_y = B_1v_{12} + B_2v_{22} + B_3v_{32}$$

$$B_z = B_1v_{13} + B_2v_{23} + B_3v_{33}$$

写成矩阵形式为:

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}' \mathbf{B}'$$

其中:

$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}$$

电磁场的变换为:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}' \mathbf{H}'$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}' \mathbf{B}'$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}' \mathbf{E}'$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}' \mathbf{D}'$$

式(9)为直角主坐标系与直角特征坐标系间电磁场量的变换关系。

3 在各向异性介质电磁散射中的应用

各向异性介质目标的内电场求解十分复杂, 人们往往在特征坐标系中研究目标的内场, 给各向异性目标的散射、识别及隐身等应用带来困难。利用上面的结果可以解决各向异性目标在柱坐标系的散射问题。为简单起见, 下面结合有关文献给出各向异性目标的瑞利散射结果以及磁导率在主坐标系的表达式。由文

献[12]可得在平面电磁波的照射下, 当球的半径远小于电磁波的波长时, 特征坐标系中各向异性介质球的内电场为:

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \cos \varphi'_0}{3 + \lambda_1} \\ \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \sin \varphi'_0}{3 + \lambda_2} \\ \frac{3E'_0 \cos \theta'_0}{3 + \lambda_3} \end{bmatrix}$$

式中: θ'_0, φ'_0 为入射波的极化方位参数。将上式代入式(9)可以得到主坐标系中的各向异性介质球的内电场:

$$\begin{cases} E_x = v_{11} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \cos \varphi'_0}{3 + \lambda_1} + v_{21} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \sin \varphi'_0}{3 + \lambda_2} + v_{31} \frac{3E'_0 \cos \theta'_0}{3 + \lambda_3} \\ E_y = v_{12} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \cos \varphi'_0}{3 + \lambda_1} + v_{22} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \sin \varphi'_0}{3 + \lambda_2} + v_{32} \frac{3E'_0 \cos \theta'_0}{3 + \lambda_3} \\ E_z = v_{13} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \cos \varphi'_0}{3 + \lambda_1} + v_{23} \frac{3E'_0 \sin \theta'_0 \sin \varphi'_0}{3 + \lambda_2} + v_{33} \frac{3E'_0 \cos \theta'_0}{3 + \lambda_3} \end{cases} \quad (10)$$

由式(10)可得各向异性介质目标^[14]的散射振幅:

$$f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{o}}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{V'} \{ -\hat{\mathbf{o}} \cdot [\hat{\mathbf{o}}] \} \{ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \} \mathbf{r} \mathbf{E}' e^{ikr' \cdot \hat{\mathbf{o}}} d\mathbf{r}$$

式中: $\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}$ 分别为散射方向与入射方向的单位矢量。

由于介电常数张量已经对角化处理, 不再讨论。下面讨论基于介电常数张量对角化后磁导率的变换, 在主坐标系和特征坐标系中, 磁场强度与磁感应强度的关系分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{B}' = \mu' \mathbf{H}' \end{cases} \quad (11)$$

由式(9)可得: $\mathbf{B} = \mathbf{V}' \mathbf{B}'$ 和 $\mathbf{H} = \mathbf{V}' \mathbf{H}'$, 将该式代入(11)的第1式得:

$$\mathbf{V}' \mathbf{B}' = \mu \mathbf{V}' \mathbf{H}'$$

上式两端左乘以 $(\mathbf{V}')^{-1}$:

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{V}')^{-1} \mu \mathbf{V}' \mathbf{H}'$$

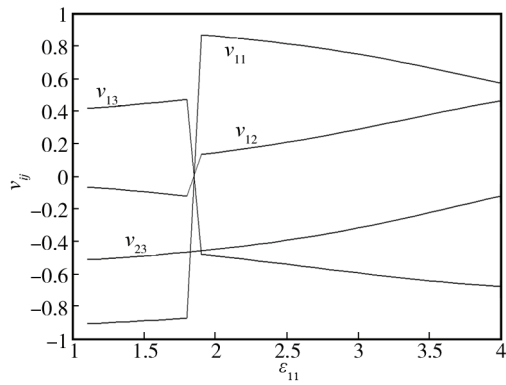
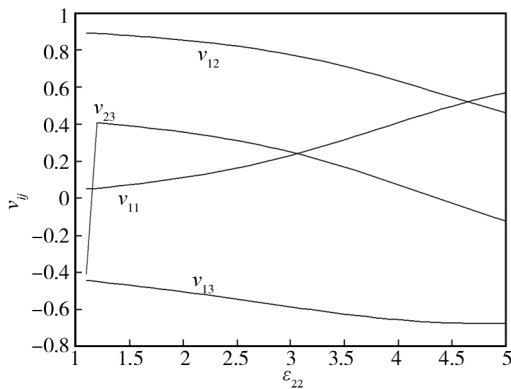
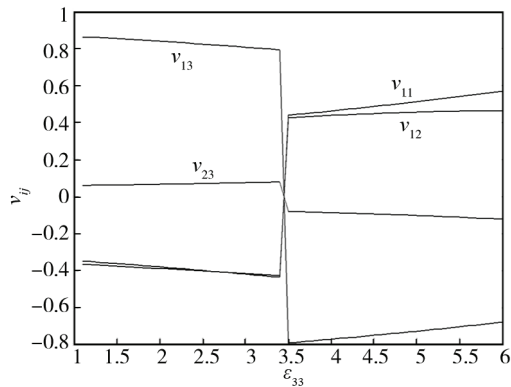
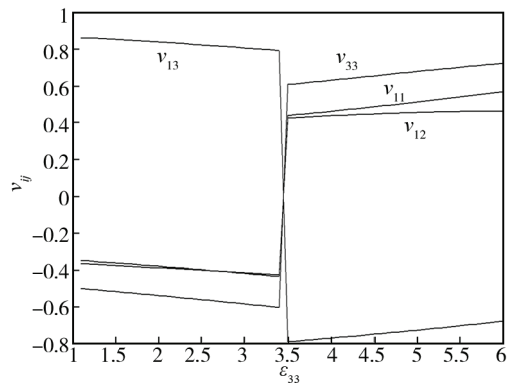
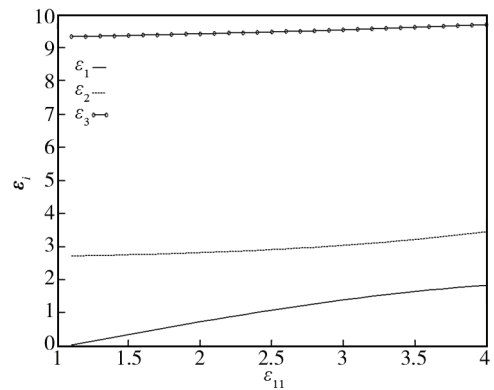
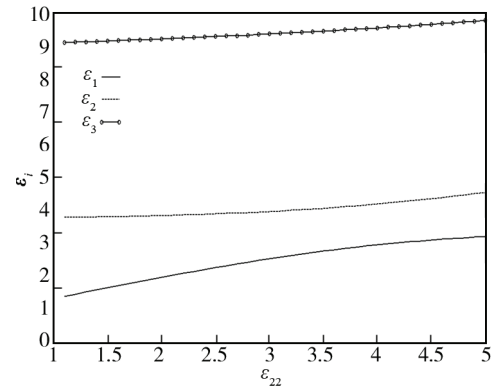
与式(9)的第2式比较可得:

$$\mu' = (\mathbf{V}')^{-1} \mu \mathbf{V}' \quad (12)$$

由此可得逆变换为:

$$\mu = \mathbf{V}' \mu' (\mathbf{V}')^{-1} \quad (13)$$

由式(9)可以看出: 主坐标系中电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 的大小除了和特征坐标系中电场强度矢量 $\mathbf{E}'$ 的大小有关外, 还和特征矢量的分量 v_{ij} 有关, v_{ij} 的部分数值结果如图1—图6所示。

图 1 v_{ij} 随主坐标系 ε_{11} 的变化图 2 v_{ij} 随主坐标系 ε_{22} 的变化图 3 v_{ij} 随主坐标系 ε_{33} 的变化图 4 v_{33} 随主坐标系 ε_{33} 的变化图 5 ε_i 随主坐标系 ε_{11} 的变化图 6 ε_i 随主坐标系 ε_{22} 的变化

在图 1—图 6 中，除横坐标参数外，其他参数采用：

$$\varepsilon_r = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2.5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2.5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

计算步长采用 0.1。图 1 表明，主坐标系中的 ε_{11} 对分量 v_{23} 影响较小，其余分量 v_{13} ， v_{12} ， v_{11} 受 ε_{11} 的影响较大。由图 2 可以看出，主坐标系中的 ε_{22} 对分量 v_{23} 的影响较为敏感。图 3 为 ε_{33} 对 v_{13} ， v_{12} ， v_{11} 及 v_{23} 的影响， v_{13} ， v_{12} ， v_{11} 随着 ε_{33} 的变化剧烈的变化。图 4 表明， v_{33} ， v_{13} 随主坐标系 ε_{33} 的变化较大，其余的分量变化较小。图 5 和图 6 表明，特征坐标系中介电常数张量元素随着主坐标系中元素的增大而增大，这一内在的一致性表明了同一物理参数如介电常数因参照系选择的不同可以有所不同，但其特性与参照系的选择无关。

4 结语

文中研究了无损耗各向异性介质的重构规律，得到了一系列研究结果。结果表明，基于电场强度矢量和电位移矢量的关系，可以将各向异性介质的介电常数张量重构为介电常数张量为对角张量的各向异性介质，有确定的特征坐标系存在，该特征坐标系中的

矢量与主坐标系中的矢量有着确定的变换关系。得到了特征坐标系中描述介质参数的二阶张量与主坐标系中描述介质的二阶张量之间的变换关系,对所得结果进行了数值计算。数值结果表明,特征坐标系中介电常数张量的元素随着主坐标系中相应元素的增大而增大,表明了同一物理参数如介电常数因参照系选择的不同其大小可以有所不同,但其特性与参照系的选择无关,所用方法具有通用性。各向异性电磁问题一般在特征坐标系中可以得到解析解,所得结果为从特征坐标系中的相关电磁结果获得主坐标系中各向异性介质的电磁问题解等提供了方法与途径,可用于各向异性介质的光电传播、各向异性目标隐身、各向异性介质中的光电散射以及辐射研究等应用领域。

参考文献:

- [1] CHENG X, KONG J A, RAN L. Polarization of Waves in Reciprocal and Nonreciprocal Uniaxially Bianisotropic Media[J]. PIERs, 2008, 4(3): 331-335.
- [2] KRISTENSSON G, POULSEN S, RIKTE S. Propagators and Scattering of Electromagnetic Waves in Planar Bianisotropic Slabs—An Application to Frequency Selective Structures[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2004, 48(1): 1-25.
- [3] CHEN H T, ZHU G Q, HE S Y. Using Genetic Algorithm to Reduce the Radar Cross Section of Three-dimensional Anisotropic Impedance Object[J]. Progress in Electromagnetics Research B, 2008(9): 231-248.
- [4] GAVRILENKO V G, G. JANDIERI V, ISHIMARU A, et al. Peculiarities of Spatial Spectrum of Scattered electromagnetic Waves in Anisotropic Inhomogeneous Medium[J]. Progress in Electromagnetics Research B, 2008 (7): 191-208.
- [5] KOKKORAKIS G C. Scalar Equations for Scattering by Rotationally Symmetric Radially Inhomogeneous Anisotropic Sphere[J]. ProgressIn Electromagnetics Research Letters, 2008(3): 179-186.
- [6] LI Y L, LI J. Internal and External Electric Fields for an Anisotropic Dielectric Particle in Electromagnetic Beams[J]. Transaction on Antennas and Propagation, 2013, 61 (9): 4754-4761.
- [7] 陈桑年, 洪清泉, 王建成. 介质为各向异性的电磁场[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [8] 孙竞博, 周济. 各向异性材料中的负折射行为[J]. 科学通报, 2012, 57(4): 231-238.
- [9] CHEW W C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media[J]. New York: VanNostrand Reinhold, 1990.
- [10] 聂在平, 柳清伙. 非均匀介质中的场和波[M]. 北京: 电子工业出版社, 1992.
- [11] 李瑾. 各向异性介质中的库仑定律[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(6): 062601-1
- [12] LI Ying-le, WANG Ming-jun. Electric Fields Inside & Outside An Anisotropic Medium Sphere[J]. Chinese Physics B, 2009, 39(3): 2420-2427.
- [13] 田红军, 佟铁钢. 带地形的二维各向异性大地电磁测深数值模拟[J]. 工程地球物理学报, 2015, 12(2): 139-145.
- [14] 李瑾, 冯晓毅, 王明军. 电偶极子的各向异性辐射特性[J]. 环境装备工程, 2017, 14(7): 18-22.