

频域子结构方法在力学环境预示中的应用研究

陈江攀, 王冬, 刘艺, 刘艳, 张为雯

(北京电子工程总体研究所, 北京 100854)

摘要: **目的** 利用频域子结构方法 (FBSM, FRF Based Sub-structuring Method) 对结构的力学环境进行准确高效地预示。**方法** 分别对处理子结构间为刚性连接和弹性连接两种问题的 FBSM 进行理论推导。为了验证 FBSM 的正确性, 设计连接为刚性连接和弹性连接两种算例结构, 并将 FBSM 对算例结构频响函数的计算结果与有限元方法 (FEM, Finite Element Method) 的对应计算结果进行对比。其中, 弹性连接利用空间梁单元进行等效, 并将该等效方法与利用六自由度标量弹簧的等效方法进行对比。**结果** 对于刚性连接和弹性连接两种情况, FBSM 对频响函数的计算结果均与 FEM 的对应计算结果吻合程度良好。此外, 空间梁单元的结点刚度矩阵为非对角阵, 与六自由度标量弹簧相比, 可更为准确地等效工程实际中的弹性连接。**结论** FBSM 可对结构的力学环境进行准确高效的预示, 且在处理具有弹性连接结构的力学环境预示问题时, 可采用空间梁单元等效弹性连接。

关键词: 频域子结构方法; 力学环境预示; 刚性连接; 弹性连接; 空间梁单元

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2018.11.005

中图分类号: TB123 **文献标识码:** A

文章编号: 1672-9242(2018)11-0024-06

Application of FRF Based Sub-structuring Method in Prediction of Mechanical Environment

CHEN Jiang-pan, WANG Dong, LIU Yi, LIU Yan, ZHANG Wei-wen
(Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854, China)

ABSTRACT: Objective To predict the mechanical environment of structure correctly and efficiently with FRF Based Sub-structuring Method (FBSM). **Methods** The FBSM employed to predict the mechanical environment of structure with rigid and elastic joint were deduced, respectively. Meanwhile, two example structures, with rigid and elastic joint respectively, were designed to validate the obtained FBSMs via comparing the corresponding calculation results of FRF achieved through FBSM and Finite Element Method (FEM). The elastic joint was equivalent with spatial beam element and the advantages of this equivalent method were compared with 6-DOF scalar spring to simulate the elastic joint. **Results** The calculation results obtained by FBSM were in good agreement with them achieved via FEM no matter the joint was rigid or elastic. Additionally, since the node stiffness matrix of the spatial beam element was a non-diagonal matrix, spatial beam element held the advantages of simulating the actual engineering elastic joint more precisely compared with 6-DOF scalar spring. **Conclusion** FBSM could predict the mechanical environment of structure correctly and efficiently. Moreover, the spatial beam element and other equivalent elastic connection could be used to predict mechanical environment of elastic connection structure.

收稿日期: 2018-09-08; 修订日期: 2018-10-08

作者简介: 陈江攀 (1988—), 男, 河北人, 博士, 工程师, 主要研究方向为可靠性与环境工程。

通讯作者: 王冬 (1961—), 女, 北京人, 硕士, 研究员, 主要研究方向为可靠性与环境工程。

KEY WORDS: FRF Based Sub-structuring Method; mechanical environment prediction; rigid joint; elastic joint; spatial beam element

随着科学技术的飞速发展,工程实际中的结构系统越来越复杂,利用 FEM 分析如飞行器、船舶以及车辆等大型复杂结构的动力学特性时,离散后的结构自由度往往是数以万计,甚至是数以十万、百万计,而所关心的往往只是复杂结构的少数低阶动力学特性,故采用直接法求解不仅受到计算机工作性能的限制,还大大降低计算效率,并提高计算成本^[1]。动态子结构方法的提出与发展则有效地解决了这一问题,其基本思路是“先化整为零,再积零为整”^[2]。该方法的优点为:1)整体结构的自由度得到大量缩减,从而在保证计算精度的基础上有效提升计算效率;2)可对所关注的子结构进行独立修改和优化,而其余子结构保持不变;3)大型复杂结构的各子结构可由不同部门在不同地区进行设计、测试和分析,然后再进行综合,即可获得整体耦合结构的动力学模型,便于分工协作;4)具有广泛的应用范围,可对分别基于有限元和试验测试所建立的子结构理论模型和试验模型进行综合^[3]。

传统上按照求解域的不同可将动态子结构方法分为两类,即模态综合法(CMS, Component Mode Synthesis)和 FBSM。CMS 发展较早且方法较为成熟,并已得到了广泛的应用。该方法适用于基于有限元方法所建立的理论模型的综合问题,但工程实际中常存在由试验测试获得的试验模型以及理论-试验混合模型的综合问题。此时,则需基于子结构的频响函数矩阵进行处理^[4-5],即 FBSM。

最初的 FBSM 是阻抗耦合方法,阻抗耦合方法要求对子结构的全体自由度频响函数矩阵进行求逆,故计算精度和计算效率均较低,且当频响函数矩阵奇异时,该方法失效^[6]。Jetmundsen 等^[7]在前人的研究基础上,发展了导纳耦合方法,导纳耦合方法只需对界面连接自由度的频响函数矩阵进行求逆,这使得该方法的计算精度和计算效率较阻抗耦合方法均大幅提高,但该方法仅适用于处理两个独立子结构之间的综合问题。在导纳耦合方法的基础上,Ren 等^[8]提出了一种适用范围更广的广义导纳耦合方法,该方法可直接用于处理多个非独立子结构之间的综合问题。值得指出的是,广义导纳耦合方法仅适用于处理子结构间为刚性连接的频域子结构综合问题,但工程结构中的连接大都为弹性连接^[9]。为此,文献[10-12]基于广义导纳耦合方法,将子结构间的弹性连接划分成一个独立的连接子结构,对考虑弹性连接的 FBSM 进行了详细推导,形成了现有的考虑弹性连接的 FBSM。

在上述研究成果的基础上,文中分别对处理子结构间为刚性连接和弹性连接两种问题的 FBSM 进行了理论推导,并通过设计算例仿真对 FBSM 的正确性进行了验证。此外,还就弹性连接的等效方法进行了讨论。

1 刚性连接 FBSM 推导

以图 1 所示结构对处理子结构间为刚性连接问题的 FBSM 进行推导。

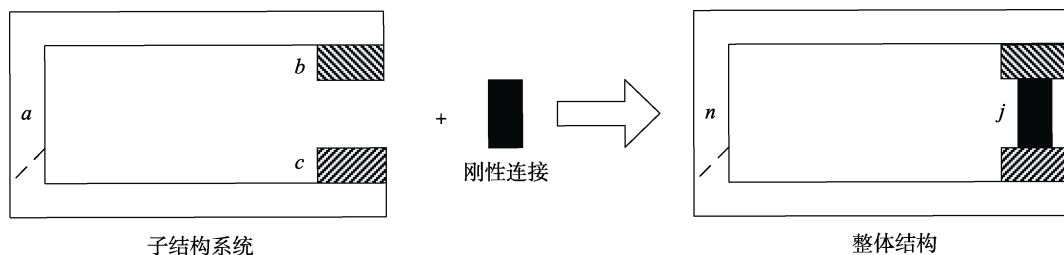


图 1 刚性连接子结构系统及整体结构

图 1 中, a 和 n 分别代表子结构系统和整体结构的内部结点自由度, b 、 c 和 j 分别代表子结构系统和整体结构的界面结点自由度。此时,可将子结构系统和整体结构的频响函数矩阵分别写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{aa} & H_{ab} & H_{ac} \\ H_{ba} & H_{bb} & H_{bc} \\ H_{ca} & H_{cb} & H_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_n \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{nn} & H_{nj} \\ H_{jn} & H_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ f_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: x 、 H 和 f 分别代表响应列向量、频响函

数矩阵和激励列向量。引入位移协调和力平衡条件:

$$x_b = x_c = x_j; f_b + f_c = f_j \quad (2)$$

此外,由于综合前后,子结构系统和整体结构内部结点自由度的响应和激励均未发生变化,因此可得:

$$x_a \equiv x_n; f_a \equiv f_n \quad (3)$$

由式(1)和式(2)可得:

$$\begin{aligned} x_b = x_c = H_{ba}f_a + H_{bb}f_b + H_{bc}f_c = \\ H_{ca}f_a + H_{cb}f_b + H_{cc}f_c \end{aligned} \quad (4)$$

将式(2)和式(3)代入式(4)并整理可得:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc}) f_b = \\ & (\mathbf{H}_{ca} - \mathbf{H}_{ba}) f_n + (\mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{bc}) f_j \end{aligned} \quad (5)$$

此时,若矩阵 $(\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc})$ 可逆,则式(5)可改写为:

$$\begin{aligned} f_b &= (\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc})^{-1} \cdot \\ & [(\mathbf{H}_{ca} - \mathbf{H}_{ba}) f_n + (\mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{bc}) f_j] \end{aligned} \quad (6)$$

将式(2)和式(6)代入式(1)并整理可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{mn} &= \mathbf{H}_{aa} - (\mathbf{H}_{ab} - \mathbf{H}_{ac})(\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \\ & \mathbf{H}_{bc})^{-1} \cdot (\mathbf{H}_{ba} - \mathbf{H}_{ca}) \\ \mathbf{H}_{nj} &= \mathbf{H}_{ac} - (\mathbf{H}_{ab} - \mathbf{H}_{ac})(\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \\ & \mathbf{H}_{bc})^{-1} \cdot (\mathbf{H}_{bc} - \mathbf{H}_{cc}) = \mathbf{H}_{ab} - (\mathbf{H}_{ac} - \mathbf{H}_{ab}) \cdot \\ & (\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc})^{-1} (\mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bb}) \\ \mathbf{H}_{jn} &= (\mathbf{H}_{nj})^T \\ \mathbf{H}_{jj} &= \mathbf{H}_{cc} - (\mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{cc})(\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \\ & \mathbf{H}_{bc})^{-1} \cdot (\mathbf{H}_{bc} - \mathbf{H}_{cc}) = \mathbf{H}_{bb} - (\mathbf{H}_{bc} - \mathbf{H}_{bb}) \cdot \\ & (\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc})^{-1} (\mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bb}) \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{mn} & \mathbf{H}_{nj} \\ \mathbf{H}_{nj} & \mathbf{H}_{jj} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{aa} & \mathbf{H}_{ac} \\ \mathbf{H}_{ca} & \mathbf{H}_{cc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ab} - \mathbf{H}_{ac} \\ \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{cc} \end{bmatrix} \cdot \\ & (\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ab} - \mathbf{H}_{ac} \\ \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{cc} \end{bmatrix}^T = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{aa} & \mathbf{H}_{ab} \\ \mathbf{H}_{ba} & \mathbf{H}_{bb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ac} - \mathbf{H}_{ab} \\ \mathbf{H}_{bc} - \mathbf{H}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \\ & (\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{H}_{cc} - \mathbf{H}_{cb} - \mathbf{H}_{bc})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ac} - \mathbf{H}_{ab} \\ \mathbf{H}_{bc} - \mathbf{H}_{bb} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)即为处理子结构间为刚性连接问题的 FBSM

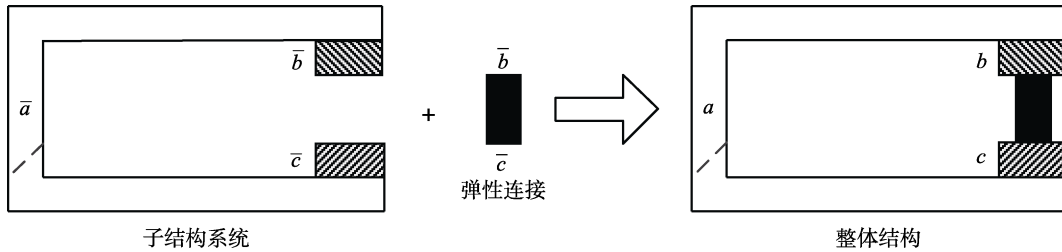


图2 弹性连接子结构系统及整体结构

由式(10)和式(11)可得:

$$f_{\bar{b}} = \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{b}} x_b + \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{c}} x_c; f_{\bar{c}} = \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{b}} x_b + \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{c}} x_c \quad (13)$$

由式(10)、式(11)和式(12)可得:

$$\begin{aligned} x_b &= \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{a}} f_a + \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{b}} (f_b - f_{\bar{b}}) + \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{c}} (f_c - f_{\bar{c}}); \\ x_c &= \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{a}} f_a + \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{b}} (f_b - f_{\bar{b}}) + \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{c}} (f_c - f_{\bar{c}}) \end{aligned} \quad (14)$$

的表达式。其中,各子结构的频响函数矩阵可通过试验测试或理论计算获得。计算方法通常选用模态叠加法:

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^w \frac{\varphi_i(\varphi_i)^T}{k_i + j\omega c_i - \omega^2 m_i} \quad (9)$$

式中: m_i 、 c_i 和 k_i 分别为子结构对应于第 i 阶模态 φ_i 的模态质量、模态阻尼和模态刚度; j 为虚数单位; ω 为角频率; w 为参加计算的模态总阶数,且由于 $w \ll n$ (n 为子结构的全部模态阶数),故上述 FBSM 可实现计算效率的显著提高。

2 弹性连接 FBSM 推导

以图 2 所示结构对处理子结构间为弹性连接问题的 FBSM 进行推导。

图 2 中: a 代表内部结点自由度; b 和 c 代表界面结点自由度;上标“-”和“-~”分别代表子结构系统和弹性连接。此时,可将子结构系统的频响函数矩阵以及弹性连接的阻抗矩阵分别写为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{\bar{a}} \\ x_{\bar{b}} \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\bar{a}\bar{a}} & \mathbf{H}_{\bar{a}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{a}\bar{c}} \\ \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{a}} & \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{a}} & \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\bar{a}} \\ f_{\bar{b}} \\ f_{\bar{c}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_{\bar{b}} \\ f_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \\ \mathbf{Z} \begin{bmatrix} x_{\bar{b}} \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{b}} & \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{b}} \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

式中: \mathbf{Z} 代表阻抗矩阵。引入位移协调和力平衡条件为:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\bar{b}} \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\bar{b}} \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\bar{b}} \\ f_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{\bar{b}} \\ f_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

此外,由于综合前后,子结构系统和整体结构内部结点自由度的响应和激励均未发生变化,因此可得:

$$x_{\bar{a}} \equiv x_a; f_{\bar{a}} \equiv f_a \quad (12)$$

将式(14)代入式(13)并整理可得:

$$\begin{aligned} f_{\bar{b}} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{b}} & \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\bar{b}} \\ f_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{Z}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{b}} & \mathbf{Z}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{a}} & \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{a}} & \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{b}} & \mathbf{H}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_{\tilde{c}} + \begin{bmatrix} Z_{\tilde{c}\tilde{b}} & Z_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\tilde{b}} \\ f_{\tilde{c}} \end{bmatrix} = \left\{ I + \begin{bmatrix} Z_{\tilde{b}\tilde{b}} & Z_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ Z_{\tilde{c}\tilde{b}} & Z_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{\tilde{b}\tilde{b}} & Z_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ Z_{\tilde{c}\tilde{b}} & Z_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\tilde{a}\tilde{b}} & H_{\tilde{a}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(15)写成矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} f_{\tilde{b}} \\ f_{\tilde{c}} \end{bmatrix} = \left\{ I + \begin{bmatrix} Z_{\tilde{b}\tilde{b}} & Z_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ Z_{\tilde{c}\tilde{b}} & Z_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{\tilde{b}\tilde{b}} & Z_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ Z_{\tilde{c}\tilde{b}} & Z_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\tilde{a}\tilde{b}} & H_{\tilde{a}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \quad (16)$$

式(16)中，若待求逆矩阵具有奇异性，可采用奇异值分解方法对其进行处理^[13]。此时，将式(11)、式(12)以及式(16)代入式(10)并整理可得：

$$H = \begin{bmatrix} H_{\tilde{a}\tilde{a}} & H_{\tilde{a}\tilde{b}} & H_{\tilde{a}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{b}\tilde{a}} & H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{a}} & H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{\tilde{a}\tilde{b}} & H_{\tilde{a}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{b}\tilde{b}} & H_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ H_{\tilde{c}\tilde{b}} & H_{\tilde{c}\tilde{c}} \end{bmatrix}$$

式(17)即为处理子结构间为弹性连接问题的 FBSM 的表达式。值得指出的是，式(17)中参与求逆的矩阵阶数仅为界面结点自由度数，故可显著提高计算效率。同理，式(17)中各子结构的频响函数矩阵也可通过试验测试或由式(9)所示的模式叠加法计算获得。

3 弹性连接等效方法

在利用式(17)对具有弹性连接的结构进行力学环境预示时，如何对弹性连接进行准确地等效将直接影响预示精度。文献[5, 14]利用 6 自由度标量弹簧-阻尼系统等效结构中的弹性连接，对具有弹性连接结构的力学环境预示方法进行了初步研究，并取得了一定的研究成果，但这种等效方法没有考虑弹性连接各自由度间的刚度耦合作用，与工程实际并不相符。由文献[15]可知，空间梁单元的刚度矩阵 K_b 的表达式为：

$$K_b = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中： A 、 E 和 G 分别为空间梁单元的截面面积、弹性模量和剪切模量； L 为单元长度； I_x 为单元截面

的极惯性矩； I_y 和 I_z 则分别表示单元截面对坐标轴 y 和 z 的惯性矩。

由式(18)可知，空间梁单元的结点刚度矩阵为非对角阵，存在垂向平动和弯曲的耦合项，故与六自由度标量弹簧相比，可更为准确地等效复杂结构中的弹性连接刚度。此外，弹性连接的质量远小于整体结构质量，对整体结构力学特性的影响可忽略不计^[4,8]。此时，假设弹性连接为瑞利比例阻尼，则可将弹性连接的阻抗矩阵 Z 写为：

$$Z = (1 + j\omega\beta)K_b \tag{19}$$

式中： β 为比例阻尼系数。

4 算例验证

为了验证上述推导所得分别处理子结构间为刚性连接和弹性连接两种问题的 FBSM 的正确性，设计了如图 3 所示的算例结构。图 3 中， P 和 Q 为两根相同的矩形截面长梁，截面尺寸和梁长度分别为 $0.02\text{ m} \times 0.04\text{ m}$ 和 0.5 m 。 C 为弹性连接，采用两根

相同的圆形截面短梁来等效，截面直径和梁长度分别为 0.005 m 和 0.05 m 。此外， P 、 Q 和 C 均为瑞利比例阻尼。利用空间梁单元对弹性连接进行等效，并对 P 、 Q 和 C 进行单元划分，在此基础上，分别建立 P 、 Q 、 C 以及整体结构的有限元模型，单元属性见表 1。

在上述基础上，分别利用 FBSM 和 FEM 对图 3 所示算例结构中结点 1 和结点 2 两个结点之间三个平动方向的频响函数进行计算，并将两种方法对应的计算结果进行了对比，如图 4 所示。其中，图 3a 所示子结构间为刚性连接的算例结构，其结点 1 和结点 2 两个结点之间的 X - X 平动方向在 1000 Hz 内无固有频率，故图 4a 只给出了 FBSM 和 FEM 对 Y - Y 和 Z - Z 两个平动方向在 1000 Hz 内频响函数计算结果的对比情况。

由图 4 可知，对于子结构间为刚性连接和弹性连接两种情况，FBSM 对频响函数的计算结果均与 FEM 的对应计算结果吻合程度良好，即 FBSM 可对结构的力学环境进行准确高效地预示。

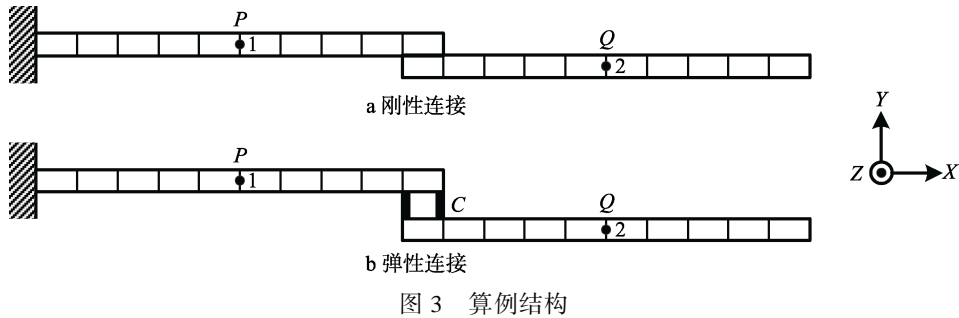
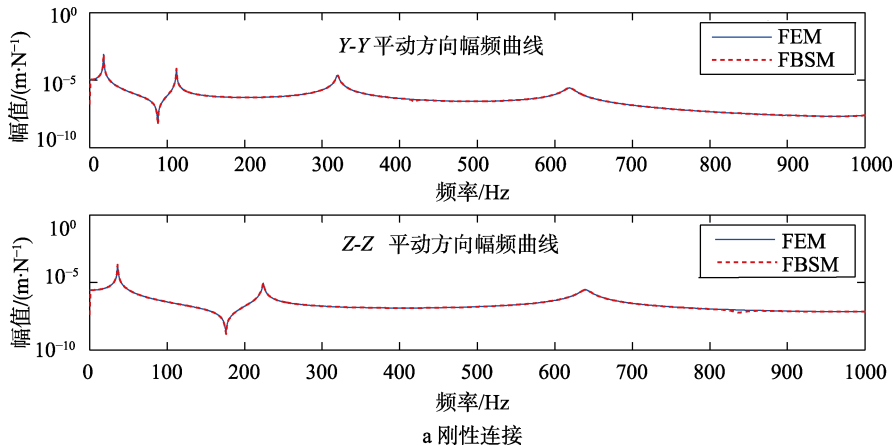


表 1 算例结构单元属性

子结构	弹性模量/Pa	泊松比	密度/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	单元长度/m	单元数量	比例阻尼系数
P 、 Q	7×10^{10}	0.3	2700	0.05	10	$\alpha = 5 \times 10^{-3}$, $\beta = 5 \times 10^{-6}$
C	2.1×10^{11}	0.3	0	0.05	2	$\beta = 5 \times 10^{-6}$



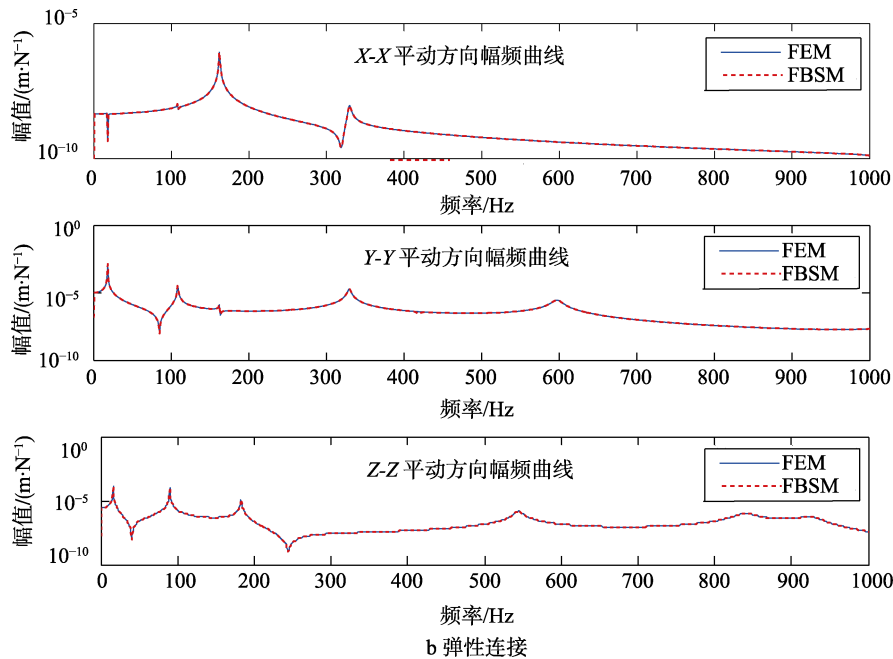


图 4 两种方法计算结果对比情况

5 结语

文中分别对处理子结构间为刚性连接和弹性连接两种问题的 FBSM 进行了理论推导, 并就弹性连接的等效方法进行了讨论, 且通过算例仿真验证了 FBSM 的正确性。结果表明, 对于子结构间为刚性连接和弹性连接两种情况, FBSM 均可对结构的力学环境进行准确高效的预示, 且在处理具有弹性连接结构的力学环境预示问题时, 可采用空间梁单元等效弹性连接。该研究所得的结论具有一定的理论研究和工程应用价值。

参考文献:

- [1] 安方. 固定界面模态综合法的理论分析[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2008.
- [2] 王威. 基于频响函数的子结构混合建模研究及实现[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.
- [3] KLERK D, RIXEN D J, VOORMEEREN S N. General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review and Classification of Techniques[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(5): 1169-1181.
- [4] 陈江攀. 基于不确定安装界面的航天器活动部件微振动特性研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2017.
- [5] 王威, 胡于进, 凌玲. 考虑连接特性的子结构频响综合方法及实现[J]. *中国机械工程*, 2013, 24(10): 1385-1389.
- [6] IMREGUN M, ROBB D A, EWINS D J. Structural Modification and Coupling Dynamic Analysis Using Measured FRF Data[C]// *International Modal Analysis Conference*. [s.l.]:[s.n.], 1987.
- [7] JETMUNDSEN B, BIELAWA R L, FLANNELLY W G. Generalized Frequency Domain Substructure Synthesis[J]. *Journal of the American Helicopter Society*, 1987, 33(1): 55-64.
- [8] REN Y, BEARDS C F. On Substructure Synthesis with FRF Data[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 185(5): 845-866.
- [9] 胡彦超, 陈章位. 考虑连接动态特性的子结构综合方法[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2008, 42(8): 1404-1409.
- [10] FERREIRA J V, EWINS D J. Nonlinear Receptance Coupling Approach Based on Describing Functions[J]. *Proceedings of SPIE—The International Society for Optical Engineering*. [s.l.]:[s.n.], 1996.
- [11] LIU W. Structural Dynamic Analysis and Testing of Coupled Structures[D]. UK: Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2001.
- [12] LIU W, EWINS D J. Substructure Synthesis Via Elastic Media[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 257(2): 361-379.
- [13] GIALAMAS T P, TSAHALIS D T, OTTE D, et al. Substructuring Technique: Improvement by Means of Singular Value Decomposition (SVD)[J]. *Applied Acoustics*, 2001, 62(62): 1211-1219.
- [14] 李效韩, 杨炳渊. 结构振动分析中的连接子结构[J]. *宇航学报*, 1987, 8(1): 10-18.
- [15] 邢誉峰, 李敏. 计算固体力学原理与方法[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.