

# 变温环境下结构高频瞬态能量响应预示

仝宗凯<sup>1</sup>, 赵保平<sup>1</sup>, 陈强<sup>2</sup>

(1.北京机电工程研究所, 北京 100074; 2.东南大学 空天机械动力学研究所, 南京 210096)

**摘要:** **目的** 解决变温环境下结构的高频瞬态能量响应预示问题。**方法** 基于统计能量分析方法, 通过考虑时变参数对结构能量的影响和热效应引起的材料力学性能变化和热应力对统计能量分析参数的影响, 提出了一种变温环境下结构高频瞬态能量响应预示方法。以双振子模型为例, 通过与 Newmark-beta 法的对比验证数值方法的准确性。**结果** 该方法能够较好地捕捉结构高频能量响应的周期性变化规律, 其峰值时间和峰值能量与精确数值解基本吻合。以 L 型折板系统为例, 研究了 20~300 °C 变温环境下结构的瞬态能量响应变化规律, 子系统 1 和子系统 2 之间的能量交换远小于两子系统内因阻尼引起的能量消耗, 子系统 2 瞬态能量响应的峰值时间为 4.3 ms、峰值能量为 0.09 J。**结论** 该方法具有较高的计算精度和计算效率, 能够较好地适用于结构高频瞬态能量响应预示。

**关键词:** 热效应; 时变结构; 瞬态能量; 统计能量分析

**DOI:** 10.7643/issn.1672-9242.2018.11.012

**中图分类号:** V416

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-9242(2018)11-0065-05

## Prediction of Transient Energy Response for Structures under Time-varying Thermal Load

TONG Zong-kai<sup>1</sup>, ZHAO Bao-ping<sup>1</sup>, CHEN Qiang<sup>2</sup>

(1. Beijing Mechanical-Electronic Engineering Institute, Beijing 100074, China;

2. Institute of Aerospace Machinery and Dynamics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**ABSTRACT: Objective** To solve the problem of predicting the high-frequency transient energy response of structures under varying temperature conditions. **Methods** Based on the statistical energy analysis, effects of time-varying parameter on structure energy, change of mechanical properties of materials caused by thermal effect and effect of thermal stresses on analysis parameters of statistical energy were considered. A method for predicting high-frequency transient energy response of structures under varying temperature conditions was proposed. With the two-oscillator model as an example, the accuracy of the numerical method was verified by comparing with the Newmark-beta method. **Results** This method could better capture the periodic variation of the high-frequency response of the structure. Its peak time and peak energy were basically consistent with the exact numerical solutions. For an L-shaped folded plate under time-varying thermal load from 20 °C to 300 °C, the energy exchange between system 1 and subsystem 2 was much smaller than the energy consumption caused by damping in subsystem 1 and subsystem 2. The peak time of transient energy response of subsystem 2 was 4.3 ms and the peak energy was 0.09 J. **Conclusion** The proposed method has high computational accuracy and efficiency, and is applicable to predicting high-frequency transient energy response of structures.

**KEY WORDS:** thermal effect; time-varying structure; transient energy response; statistical energy analysis

收稿日期: 2018-07-15; 修订日期: 2018-08-03

作者简介: 仝宗凯 (1970—), 男, 山西人, 研究员, 主要研究方向为飞行器结构强度。

通讯作者: 赵保平 (1963—), 男, 北京人, 研究员, 主要研究方向为飞行器环境工程。

高速飞行器在服役过程中面临着严酷的气动热环境和宽频段的噪声激励。气动加热将改变结构的温度分布,从而引起结构刚度特性和阻尼特性的变化<sup>[1]</sup>,进而影响结构的动力学特性。因此在服役过程中,飞行器的结构动力学分析属于时变动力学的范畴,而目前针对结构高频段响应预示的相关研究大多忽略了结构的时变特性。为保证能够准确地预示结构在高频段的动力学特性,急需开展变温环境下结构高频段动力响应预示研究。

统计能量分析(Statistical Energy Analysis, SEA<sup>[2]</sup>)以统计物理学原理为基础,将系统划分为若干子系统,建立子系统间的能量传递方程,从而获取系统的振动特性。统计能量分析可以很好地描述系统各组件的平均振动特性,是目前高频激励下结构动力学分析与环境预示的有力工具。对于高温环境下结构的统计能量分析而言,高温使得材料性能参数发生变化同时改变结构的应力分布状态<sup>[3-5]</sup>,从而影响结构的振动特性。目前国内外已开展高温环境下结构的统计能量分析研究, Han等<sup>[6]</sup>基于改进的夹芯板理论,计算了热环境下夹芯板的模态密度和模态数目;张鹏和费庆国等<sup>[7]</sup>考虑与温度相关的材料物性参数变化,研究了温度对统计能量分析参数的影响;陈强和费庆国等<sup>[8-9]</sup>结合有限元方法和功率输入法给出了一种热环境下适用于复杂结构的统计能量分析方法,并研究了不同热效应、热载荷参数和结构尺寸参数对统计能量分析参数的影响。虽然 SEA 已经扩展到预测热环境下系统的振动,但目前高温环境下的统计能量分析研究大多集中在定温环境下结构的高频段稳态能量响应。这主要是由于传统的 SEA 方法并未考虑结构的时变结构特性,难以应用于变温环境下时变结构的动力学分析中。

文中基于统计能量分析方法,考虑时变参数对结构能量的影响、热效应引起的材料力学性能变化和结构热应力对统计能量分析参数的影响,提出一种变温环境下结构高频瞬态能量响应预示方法。分别以时变双振子系统模型和变温环境下的 L 型折板为例,验证计算分析方法的准确性和适用性。

## 1 理论基础

### 1.1 时不变结构的统计能量分析

在统计能量分析中,对于划分为  $N$  个子系统的时不变结构,其统计能量分析模型中子系统  $i$  的能量控制方程为:

$$(\eta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \eta_{ij})\omega E_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \eta_{ji}\omega E_j(t) = P_i(t) \quad (1)$$

式中:  $\eta_i$  为子系统  $i$  的内损耗因子;  $\eta_{ji}$  为子系统  $j$  到子系统  $i$  的耦合损耗因子;  $\omega$  为角频率,  $\omega = 2\pi f$ ;

$E_i$  为子系统  $i$  在空间内和频域内的平均能量;  $P_i$  为子系统  $i$  在空间内和频域内的平均输入功率。

对于时不变结构,其统计能量分析的动力学方程为:

$$\omega \boldsymbol{\eta} E = P \quad (2)$$

式中:  $\boldsymbol{\eta}$  为总损耗因子矩阵;  $E = [E_1, E_2, \dots, E_N]^T$

为能量向量,  $P = [P_1, P_2, \dots, P_N]^T$  为输入功率向量。

对于时不变结构的总损耗因子矩阵  $\boldsymbol{\eta}$ , 其矩阵元素为:

$$\boldsymbol{\eta}(i, j) = \begin{cases} \eta_i + \sum_{j \neq i}^n \eta_{ij}, & i = j \\ -\eta_{ji}, & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

### 1.2 时变结构的统计能量分析

对于时变结构的能量控制方程,主要有以下假设<sup>[10]</sup>:

$$e(s, t) = e^+(s, t) + e^-(s, t) \quad (4)$$

$$I(s, t) = I^+(s, t) + I^-(s, t) \quad (5)$$

$$I^\pm(s, t) = \pm c \cdot e^\pm(s, t) \quad (6)$$

式中:  $e^+(s, t)$  和  $e^-(s, t)$  分别为波向左和向右传播的响应能量密度;  $I^+(s, t)$  和  $I^-(s, t)$  分别为入射和反射的功率流;  $c$  为结构中传播波的群速度。

对于无外载荷作用下,结构的能量平衡方程为<sup>[10]</sup>:

$$\frac{\partial e(s, t)}{\partial t} + \pi_{\text{diss}} + \frac{\partial I(s, t)}{\partial s} = 0 \quad (7)$$

时变结构的能量耗散项表达式为:

$$\pi_{\text{diss}} = \eta(t)\omega e(s, t) \quad (8)$$

式中:  $\eta(t)$  为时变内损耗因子。

将式(4)、(5)、(6)、(8)带入式(7)可得:

$$c \frac{\partial e(s, t)}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial I(s, t)}{\partial t} + \frac{\eta(t)\omega I(s, t)}{c} = 0 \quad (9)$$

将式(7)分别对时间和空间求微分,然后相减可得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial t^2} + \eta(t)\omega \frac{\partial e(s, t)}{\partial t} + e(s, t)\omega \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} - \\ & c^2 \frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial s^2} - \eta(t)\omega \frac{\partial I(s, t)}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

将式(7)中  $\partial I(s, t) / \partial s$  的带入式(10)可得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial t^2} + 2\eta(t)\omega \frac{\partial e(s, t)}{\partial t} + e(s, t)\omega \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} - \\ & c^2 \frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial s^2} + (\eta(t)\omega)^2 e(s, t) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

对于由  $N$  个子系统组成的时变结构,由式(11)积分可得子系统的能量控制方程为:

$$\int_V \left[ \frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial t^2} + 2\eta(t)\omega \frac{\partial e(s, t)}{\partial t} + e(s, t)\omega \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} - \right.$$

$$c^2 \frac{\partial^2 e(s,t)}{\partial s^2} + (\eta(t)\omega)^2 e(s,t) \Big] dV = P_{in} \quad (12)$$

式中： $E_i(t)$ 为子系统  $i$  的时变能量， $E_i(t) = \int_V e_i(s,t)$ ； $P_i(t)$ 是子系统  $i$  的时变输入能量；

$$\int_V \left( -\frac{c^2}{\eta(t)\omega} \nabla^2 e(s,t) \right) dV = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N (\eta_{ij}(t)\omega E_j(t)) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N (\eta_{ji}(t)\omega E_j(t))$$

$\eta_{ji}(t)$ 为子系统  $j$  到子系统  $i$  的时变耦合损耗因子。则子系统  $i$  的能量密度控制方程为：

$$\left[ \frac{1}{\eta(t)\omega} \frac{\partial^2 e(s,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\eta(t)\omega} \frac{\partial e(s,t)}{\partial t} + \frac{e(s,t)}{\eta(t)\omega} \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} - \frac{c^2}{\eta(t)\omega} \frac{\partial^2 e(s,t)}{\partial s^2} \right] + \eta(t)\omega e(s,t) + \frac{1}{\eta(t)\omega} \frac{\partial e(s,t)}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

将式 (11) 中的能量密度对体积积分，得到子系统  $i$  的能量密度控制方程为：

$$\int_V \left[ \frac{\partial^2 e(s,t)}{\partial t^2} + 2\eta(t)\omega \frac{\partial e(s,t)}{\partial t} + e(s,t)\omega \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 e(s,t)}{\partial s^2} + (\eta(t)\omega)^2 e(s,t) \right] dV = P_{in} \quad (14)$$

式中：
$$\int_V \left( -\frac{c^2}{\eta(t)\omega} \nabla^2 e(s,t) \right) dV = \sum_{j=1, j \neq i}^N (\eta_{ij}(t)\omega E_j(t)) - \sum_{j=1, j \neq i}^N (\eta_{ji}(t)\omega E_j(t))。$$

在统计能量分析中，时变结构中子系统  $i$  的能量控制方程为：

$$\frac{1}{\eta_i(t)\omega} \frac{d^2 E_i(t)}{dt^2} + 2 \frac{dE_i(t)}{dt} + \frac{1}{\eta_i(t)} E_i(t) \frac{d\eta_i(t)}{dt} + \left( \eta_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \eta_{ij}(t) \right) \omega E_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^N (\eta_{ji}(t)\omega E_j(t)) = P_i(t) \quad (15)$$

对于时变结构而言，其统计能量分析的动力学方程为：

$$\frac{1}{\omega \eta(t)} \frac{d^2 E(t)}{dt^2} + 2 \frac{dE(t)}{dt} + \frac{E(t)}{\eta(t)} \frac{d\eta(t)}{dt} + \omega \eta(t) E(t) = P(t) \quad (16)$$

对于时变总损耗因子矩阵，其矩阵元素为：

$$\boldsymbol{\eta}(t, i, j) = \begin{cases} \eta_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \eta_{ij}(t), & i = j \\ -\eta_{ji}(t), & i \neq j \end{cases} \quad (17)$$

## 2 算例验证

### 2.1 研究对象

由于欠缺复杂工程结构瞬态能量响应的理论表达式，因此以脉冲载荷作用下的时变双振子系统为例，验证该分析方法的准确性。在如图 1 所示的时变双振子系统中<sup>[11]</sup>， $m_1(0)=m_2(0)=2 \text{ kg}$ ， $k_1(0)=k_2(0)=1 \text{ 717 000 N/m}$ ， $k(0)=280 \text{ 000 N/m}$ ， $c_1(0)=c_2(0)=200 \text{ N/s}$ ，分析频率设置为  $1000 \text{ rad/s}$ 。假定在初始时刻对  $m_1$  施加脉冲激励，使其具有初速度  $\dot{x}_1(0)=1$ ，则振子 1 的初始能量为  $E_1(0)=0.5m_1$ 。

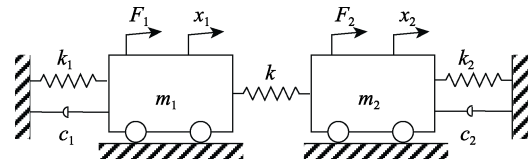


图 1 双振子系统

在统计能量分析中，时变双振子系统可以转化为由两个子系统组成的统计能量分析模型，如图 2 所示。

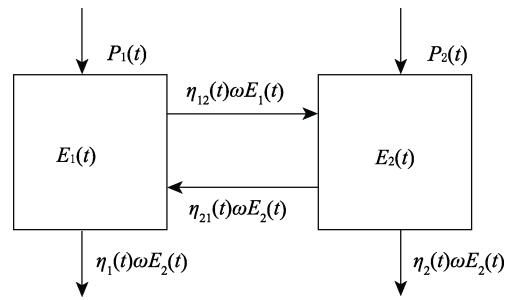


图 2 双子系统的统计能量分析模型

子系统 1 的时变内损耗因子和子系统 1 到子系统 2 的时变耦合损耗因子可表示为：

$$\eta_1(t) = \frac{c_1(t)}{m_1(t)\omega_1(t)} \quad \eta_{12}(t) = \frac{1}{2\eta_1(t)} \frac{(\chi(t))^2}{(\omega_1(t))^4} \quad (18)$$

式中： $\omega_1(t) = \sqrt{(k_1(t) + k(t)) / m_1(t)}$ ， $\chi(t) = k(t) / \sqrt{m_1(t)m_2(t)}$ 。

在 Newmark-beta 法中，对于如图 1 所示的时变双振子系统模型而言，振子  $i$  的能量可表达为势能和动能的能量之和<sup>[10]</sup>：

$$E_i(t) = \frac{1}{2} m_i(t) (\dot{x}_i(t))^2 + \frac{1}{2} (k_i(t) + k(t)) (x_i(t))^2 \quad (19)$$

### 2.2 时变双振子系统的瞬态能量响应预示

在仿真分析中，假定双振子系统具有时变阻尼特性，系统在  $0.2 \text{ s}$  内具有线性时变阻尼  $c_1(t)=c_2(t)=(200-500t) \text{ N/s}$ ，系统的质量和刚度不变。由式 (16) 计算得到子系统 2 的瞬态能量响应，由式 (19) 计算

得到振子 2 的瞬态能量响应。将文中提出的针对时变系统的 SEA 方法和 Newmark-beta 方法的结果比较进行对比,如图 3 所示。由图 3 可知,SEA 方法计算结果与 Newmark-beta 方法的结果基本一致,能够较好地捕捉振子 2 的时变能量特性。峰值时间和峰值能量是结构瞬态能量响应的主要分析指标,采用 Newmark-beta 法预示得到的峰值时间和峰值能量分别为 12.9 ms 和 0.177 J,采用文中方法分别为 13.8 ms 和 0.174 J,预示误差分别为 6.8%和 1.7%。这表明文中的计算方法具有较高的计算精度,能够较好地预示时变结构的瞬态能量响应。

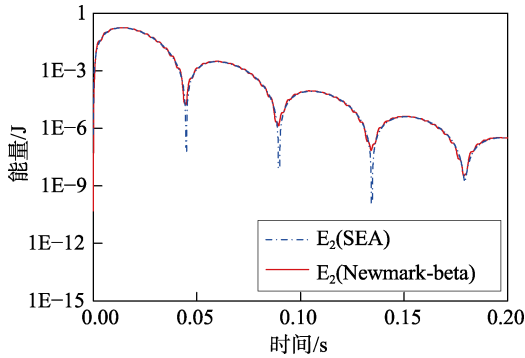


图 3 振子/子系统 1 和振子/子系统 2 的瞬态能量响应

### 3 算例研究

#### 3.1 研究对象

为研究薄壁构件在变温环境下的瞬态能量响应变化规律,以夹角为 90°的 L 型对称折板为研究对象,几何模型如图 4 所示。两板尺寸均为  $L_1 \times L_2 \times t = 0.3 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} \times 0.0018 \text{ m}$ 。板材料为 TA7 钛合金,材料属性见表 1。采用壳单元建立有限元模型,单元尺寸为 5 mm。两板除耦合边外各边简支。在分析过程中考虑了 2%

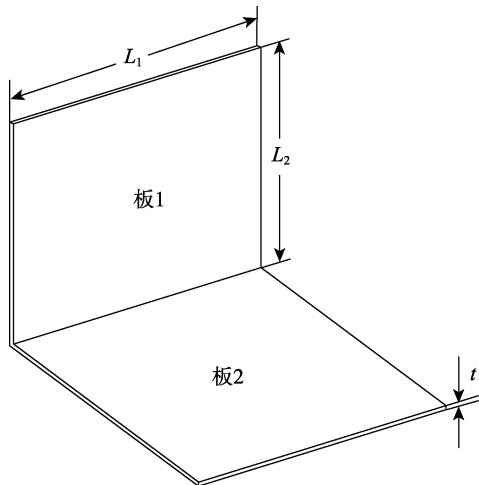


图 4 L 型对称折板

温度/°C	弹性模量 /GPa	热膨胀系数 / $(10^{-6} \cdot ^\circ\text{C}^{-1})$	泊松比	密度 / $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
20	109.5	—	0.33	4420
100	103.4	8.5		
200	98.1	8.9		
300	90.9	9.1		

的结构阻尼。

#### 3.2 变温环境下结构的瞬态能量响应预示

假定结构的初始温度为 20 °C,在 0.05 s 内线性升温至 220 °C。同时考虑热效应对材料参数特性的影响和热应力引起的附加刚度,采用有限元-功率注入法计算得到结构的时变内损耗因子和耦合损耗因子,分别如图 4 和图 5 所示。

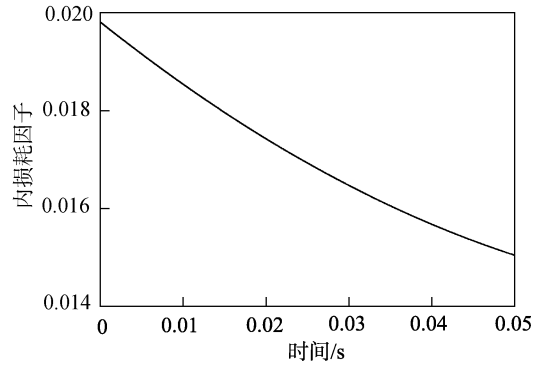


图 5 子系统 1 的时变内损耗因子

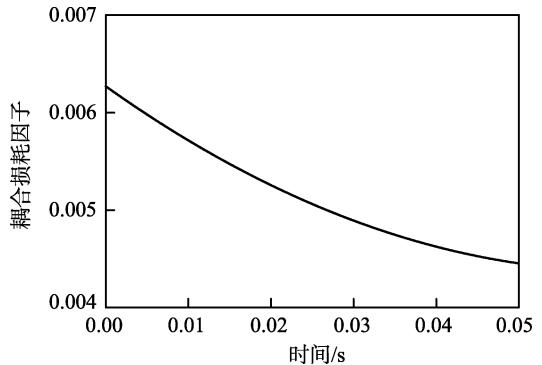


图 6 子系统 1 到子系统 2 的时变耦合损耗因子

对板 1 施加 1 J 的瞬态冲击载荷,将时变内损耗因子和时变耦合损耗因子带入式 (16) 中,进而计算得到子系统 1 和子系统 2 的瞬态能量响应,如图 6 所示。从图 6 可知,子系统 2 的能量在较短时间内达到峰值,随后子系统 1 和子系统 2 的能量以较快的速率耗散。子系统 2 瞬态能量响应的峰值时间为 4.3 ms,峰值能量为 0.093 J。子系统 1 和子系统 2 之间的能量交换远小于两子系统中因阻尼引起的能量消耗,这主要是由于子系统之间的耦合强度较弱。

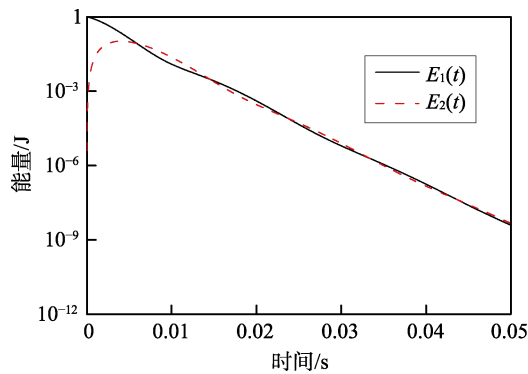


图 7 子系统 1 和子系统 2 的瞬态能量响应

## 4 结论

文中针对变温环境下结构的高频瞬态能量响应预示问题, 基于统计能量分析方法, 考虑时变参数对结构能量的影响、热效应引起的材料力学性能变化和热应力对统计能量分析参数的影响, 提出了一种变温环境下结构高频瞬态能量响应预示方法。以具有理论解的时变双振子系统模型为例, 验证了计算该方法的准确性; 以变温环境下的折板系统为例, 验证了该计算方法的适用性。结果表明, 对于双振子模型, 采用该方法预示得到的峰值时间和峰值能量的预示误差分别为 6.8% 和 1.7%。这说明方法具有较高的计算精度和计算效率, 能够较好地适用于结构的高频瞬态能量响应预示。

该方法目前处于研究阶段, 对变温环境下飞行器结构设计具有一定的指导意义, 但该方法在复杂工程结构中的适用性还需要相关试验研究进行验证。

### 参考文献:

- [1] ZHAO R, YU K. Hamilton's Law of Variable Mass System and Time Finite Element Formulations for Time-varying Structures Based on the Law[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 99(10): 711-736.
- [2] LYON R H, DEJONG R G. Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications[M]. Massachusetts: MIT Press, 1975.
- [3] 李彦斌, 张鹏, 吴邵庆, 等. 复合材料加筋板计及热效应的声-固耦合分析[J]. 振动工程学报, 2015, 28(4): 531-540.
- [4] 杨雄伟, 李跃明, 闫桂荣. 考虑材料物性热效应飞行器声振耦合动态特性分析[J]. 固体力学学报, 2010, 31(S1): 134-142.
- [5] 耿谦, 李跃明, 杨雄伟. 热应力作用下结构声-振耦合响应数值分析[J]. 计算力学学报, 2012, 29(1): 99-104.
- [6] HAN J, YU K, LI X, et al. Modal Density and Mode Counts of Sandwich Panels in Thermal Environments[J]. Composite Structures, 2016, 153: 69-80.
- [7] 张鹏, 费庆国, 李彦斌, 等. 材料物性热效应对统计能量分析参数的影响[J]. 振动与冲击, 2016, 35(24): 73-78.
- [8] 陈强, 张鹏, 李彦斌, 等. 基于 FEM-PIM 计及热效应的统计能量分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(6): 1366-1374.
- [9] 陈强, 张鹏, 李彦斌, 等. 热环境下长宽比对 L 型折板统计能量分析参数的影响研究[J]. 振动与冲击, 2018, 37(4): 200-206.
- [10] SUI F S, ICHCHOU M N, JEZEQUEL L. Prediction of Vibroacoustics Energy Using a Discretized Transient Local Energy Approach and Comparison With TSEA[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 251(1): 163-180.
- [11] PINNINGTON R J, LEDNIK D. Transient Statistical Energy Analysis of an Impulsively Excited Two Oscillator System[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 189(189): 249-264.
- [12] 刘芹. 弹体结构热振动特性分析[D]. 西安: 西北工业大学, 2004.