

基于模态叠加法的振动响应修正方法研究概述

于晨阳, 范宣华

(中国工程物理研究院 总体工程研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要: 针对模态叠加法受模态选取和截断等影响, 往往导致动力学计算精度不高, 尤其是对高频响应难以预测这一缺点, 对多个基于模态叠加的修正方法研究的现状和发展趋势进行了概述, 简要分析了各个修正方法的优劣, 并结合目前的大规模并行计算技术探讨了添加这些修正方法的可能性。研究表明, 模态加速度法是目前相对容易实现的一种修正算法, 最易于在大规模并行计算和实际工程应用中实现。

关键词: 模态叠加法; 模态加速度法; 修正方法; 大规模并行计算

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2019.02.019

中图分类号: TB123 **文献标识码:** A

文章编号: 1672-9242(2019)02-0090-05

Summary of Modal Superposition Method Based Correction Methods for Vibration Response

YU Chen-yang, FAN Xuan-hua

(Institute of systems engineering, CAEP, Mianyang 621999, China)

ABSTRACT: The modal superposition method is affected by modal selection and truncation, which leads to low precision in dynamic calculation, especially for high frequency response. In response to this shortcoming of the mode superposition method, this paper summarized the research status and development trend of multiple correction methods based on the modal superposition, analyzed the advantages and disadvantages of each correction method, and discussed the possibility of adding these correction methods to massively parallel processing. Research shows that the modal acceleration method is a correction method that is easy to be implemented at present, and is most easily to be implemented in massively parallel processing and practical engineering applications.

KEY WORDS: modal superposition method; mode-acceleration method; correction method; massively parallel processing

模态叠加法(The Modal Superposition Method)作为商业有限元软件采用的经典计算方法, 几乎占据了动力学响应求解的主流阵地, 同时也是振动响应计算和抗震结构设计中常用的计算方法。该方法理论相对成熟, 容易进行代码实现。该方法存在一定的不足: 一方面该方法在叠加时采用了模态截断处理, 模态截断后高阶模态对结构响应的影响完全被忽略, 使得该方法求解精度受到一定影响; 另一

方面, 当结构处于高频激励时, 结构的共振区位于高频段, 采用截断高阶模态而保留低阶模态的做法得到的结果是不可信的。

为了保证精度, 模态叠加法需要将保留的模态扩展到较高的阶数, 导致模态分析需要消耗大量的内存和时间, 且高阶模态对结构的细节敏感, 高阶模态频率及模态向量结果通常是不准确的。此外, 对于实际结构动力学问题, 尤其是大规模问题, 求解全部模态

收稿日期: 2018-11-22; 修订日期: 2018-12-04

基金项目: 国家自然科学基金(11872059); 科学挑战专题项目(TZ2018002)

作者简介: 于晨阳(1993—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为固体力学。

通讯作者: 范宣华(1981—), 男, 博士, 高级工程师, 主要研究方向为固体力学。

是不现实的,这也增加了模态分析的难度。

通过研究模态叠加法的修正技术,一方面可以提升基于模态叠加法的动力学响应求解精度,另一方面也可以为结构动力学求解技术发展增添一种新的途径。

1 模态叠加法的研究现状

模态叠加法通过对物理坐标系下的运动方程进行模态坐标变换,利用模态频率和模态振型等信息对运动方程进行解耦,将其转换成模态坐标系下的一系列单自由度方程,通过求解模态坐标响应,再进行组合,得到原物理坐标系下的结构响应。通常情况下,采用保留结构的低阶模态而截断其高阶模态,然后以模态叠加的方式来分析确定结构的响应。其公式可以写为

$$u = \Phi \eta = \sum_{i=1}^m \phi_i \eta_i \quad (1)$$

式中: u 为各节点自由度对应的位移向量; Φ 为振型矩阵(也叫主模态矩阵); η 为模态坐标向量; ϕ_i 为第 i 阶模态振型向量; η_i 为第 i 阶模态坐标。

Rayleigh^[1]将经典阻尼矩阵分解成质量矩阵和刚度矩阵的线性组合,使得模态分析技术可以应用到经典阻尼系统中。Foss^[2]基于状态空间方程,给出了黏性阻尼系统的模态叠加形式。Fawzy 和 Bishop^[3]给出了复模态正交关系式,并且给出了动态响应下的复模态叠加表达式。

近几年模态叠加法仍然是一个研究热点,国内外有许多学者对模态叠加法做了大量的研究工作。2013 年, Johansson^[4]等人利用模态叠加法推导了多跨 Bernoulli-Euler 梁动力特性的封闭解。他将边界条件应用于梁的特征函数,从而得到了振动的固有频率和振型。这一研究为连续梁在恒定动载荷作用下的振动提供了一个封闭解。2016 年,彭家坤^[5]介绍了模态叠加法中由于材料非线性导致的结构运动方程耦合的解耦过程。2017 年,陈华霆^[6]等人提出了更合理的确定模态叠加法模态数目范数形式的方法,并将其分别与振型位移控制法和质量参与系数法比较,指出了此方法具有的优势。

尽管模态叠加法得到了广泛的工程应用,其高阶截断带来的误差仍是影响其计算精度的一个关键因素。为此,很多学者研究了一系列的修正方法来对模态叠加法进行修正。

2 主要修正方法

目前基于模态叠加法存在多种修正方法,可以提高分析精度。总体来看,主要有模态加速度法、动态修正方法、力求导方法等。

2.1 模态加速度法

模态加速度法(The Mode-Acceleration Method, MAM)是在模态叠加法的基础上,用准静态项对高阶模态进行弥补,从而用较少模态获得较高精度的一种方法。

模态加速度法由 Williams^[7]首先提出。随后, Maddox^[8]提出了与模态加速度法等价的静力修正方法,并指出该方法与传统的模态叠加法相比,允许截断更多的模态,并仍然可以求得较准确的位移和动载荷。Hansteen^[9]将标准模态位移分为低阶模态贡献之和以及保留的、其动力放大效应可以忽略的高阶模态贡献之和。Craig^[10-11]对这一方法进行了补充发展,形成了模态加速度法,用于约束结构和非约束结构模态分析的理论雏形。Leger^[12]等人开发了两种具体的模态加速度的计算方法,并对这两种方法进行了对比。他指出,在实际的数值计算中,采用柔度矩阵展开的方法具有更好的灵活性以及较小的运算量。Dickens^[13-14]等人提出了一种模态截断增广法(The Modal Truncation Augmentation Method),并将模态加速度法与模态截断增广法进行了比较,指出模态加速度法是模态截断增广法的一种近似形式^[15]。

对于模态加速度法比模态叠加法收敛率高的原因, Craig 将其解释为“由于动力过冲项与主刚度(或固有频率的平方)成反比”,这一解释在今天看来显得有些牵强。王文亮^[16]等人认为,这是因为“对应于载荷静态作用的分量已全部隐含在第一项中,而在模态位移法里它们分散地包含在级数的每一项中”。倪振华^[17]对模态加速度法的实质以及与模态综合之间的关系进行了阐述,他指出,模态加速度法是在模态叠加法的基础上增添了系统在剩余柔度上的伪静态响应,而这部分伪静态响应是对被激发高阶模态的动态响应的近似,因此数值分析的精度得以提高。

此外,还有一些学者对模态加速度法在截断误差分析和时域频域应用等方面开展了一系列研究。Kulkarni^[18]利用模态加速度法扩展了 Clough 和 Mojtahedi^[19]提出的非比例阻尼的地震响应分析方法,并通过一些数值算例分析了模态加速度法的截断误差。

近年来,仍然有一些国内外学者对模态加速度法开展了研究。方勇^[20-21]等人应用模态加速度法改进了大跨屋盖结构新的表达式中的风致响应计算式,推导了结构风致响应分析的模态加速度方法。Murtagh^[22]等人提出了一种计算在固定随机风载荷作用下风轮叶片挥舞方向位移响应的时域方法。利用 ANSYS 对叶片进行建模,获取叶片的刚度矩阵,求解它的固有频率和振型,然后利用模态加速度法预测节点对给定风载荷的响应。2015 年, W. Zhang^[23]等人研究了平稳随机力激励下与动力响应相关的拓扑优化问题,将

伪激励法 (PEM) 和模态加速度法结合, 提出了一种高效、准确的动态拓扑优化方法。

模态加速度法主要考虑高阶模态对于静态位移的影响, 但没有考虑高阶模态对速度和加速度的影响, 因此也被称为静力校正法。在模态加速度法提出之后, 一些学者试图进一步提高分析精度, 引入了动态修正方法和力求导方法。

2.2 动态修正方法

动态修正方法 (The Dynamic Correction Method, DCM) 将响应的逼近模态影响估计为节点空间微分方程的特解和模态子空间下缩减微分方程特解的微分, 即通过修正物理坐标系下的差分运动方程特解和模态子空间下缩减后的差分运动方程特解, 进一步提升了模态叠加的精度。

该方法最早由 G. Borino 和 G. Muscolino^[24]提出。他们在模态叠加法的基础上提出了这种新的积分和增量分析方法, 将相邻节点的解解释为伪静态响应之和, 即微分方程的特解和用缩减的模态数计算的动态修正。在积分形式上, 该方法给出了精确的稳态响应, 因此相对于其他修正方法, 此方法更加有效; 在增量形式上, 该方法通常比其他方法更为精确。之后他们通过数值算例说明了此方法比模态加速度法精度更高。随后, A. D'Aveni 和 G. Muscolino^[25]将此方法运用到地震分析中。这一方法主要需要以下两步: 1) 缩减差分运动方程, 并运用前几阶无阻尼振型求解; 2) 通过动态响应修正, 求解一组新的与原形式类似的微分方程, 从而减小模态截断引起的误差。这两组微分方程之间相差一个力矢量, 这个力矢量可以通过在激励载荷上修正模态截断的影响求得。

C. Bilello^[26]对该方法进行了完善, 他提出从给定的系统出发, 建立两个新的微分方程来控制两个新子系统的运动: 第一个只包含给定系统的 m 个非零特征值, 所对应的系统在低频段; 第二个包含其余的 $(\infty - m)$ 个特征值, 所对应的系统在高频段。通过求解以上两个系统的响应, 可以求得全局的响应。其中第一个系统的响应可以通过经典的模态分析方法 (如 Duhamell 积分或逐步积分法) 求解, 而第二个系统特解可以求得其快速收敛的级数形式。

动态修正方法与模态加速度法相比增加了一些特解修正项, 因此通常可以得到更高的精度, 但该方法特解需要所有的模态信息, 无疑大大增加了模态分析的计算量。另外为了应用动态修正方法, 载荷函数的频率范围必须完全被低频子系统的频率范围覆盖。

2.3 力求导方法

力求导方法 (The Force Derivative Method, FDM) 是另一种模态叠加法的修正方法。它通过考虑力函数的高阶导数估计节点响应的准静态近似解, 从而弥补

高阶模态的贡献, 进一步提高数值收敛性。

早期 Leung^[27]提出了一种高阶模态法, 这种方法有效地减少了动态矩阵的阶数, 而不引入进一步的近似。Camarda^[28]等人在此基础上对其进行瞬态结构分析, 得到了力求导方法, 并通过几个数值算例比较了其模态叠加法、模态加速度法的优劣, 发现力求导方法可以用更少的模态收敛到较精确的结果。

随后有许多学者对此方法的工程应用及理论的进一步发展做了大量的工作。Akgun^[29]给出了 20 阶和 40 阶系统的数值算例, 同样得出了与模态叠加法和模态加速度法相比, 该方法能有效节约时间的结论, 并指出该方法尤其适合大型系统。Rixen^[30]针对工程应用对此方法进行了进一步的讨论, 指出了高阶静态响应修正与 Lanczos 方法之间的关系。

力求导方法目前仍存在问题。首先, 力求导方法没有给出具体的收敛条件; 其次, 这类方法仅仅是基于无阻尼系统或者经典阻尼系统推导而来。对于工程应用更广泛的非经典阻尼系统, 该方法涉及了状态空间矩阵, 使得系统矩阵的维数大大增加, 明显降低了计算效率。另外在求解时, 该方法需要知道激励载荷的各阶时间导数, 这在一定程度上限制了该方法的应用。

2.4 其他方法

除了以上所述三种主要的模态叠加法的修正方法以外, 也有一些学者探索了其他的修正方法。

Z.S. Liu^[31-32]等人提出了混合动力法。这种方法将模态中的低阶模态结合起来, 并将模态截断的误差以幂级数的形式展开。此方法使得计算结果在中频段较为精确, 但是其使用了 $2N$ 维的状态空间方程进行近似计算, 从而使得系统的维数扩大了 1 倍, 增大了计算量, 效率较低。

2014 年, 李立^[33-35]等人提出了求解黏性阻尼系统等非比例阻尼系统的精确模态叠加法。这种方法在原状态空间之中将系统矩阵和特征值联系起来, 通过不断地迭代计算求解系统的响应。这种方法将精确模态叠加法引入到工程应用更为广泛的黏性阻尼系统之中, 与传统的混合动力法相比, 提高了计算速度和效率。

曲乃泗^[36-37]等人提出, 在那些质量可以被约化的自由度上, 或是在具有刚度突变的区段的自由度上, 进行动力计算时, 高阶模态的影响是不宜于略去不计的, 并提出了一种模态叠加法的修正方法。利用这种方法可以将高阶模态的影响考虑进来, 从而得到比模态叠加法更精确的结果。黄泽坤^[38]进一步发展了这一方法, 将其与子结构方法相结合, 将高阶方程组化为若干个低阶方程组求解, 提高了传统子结构方法的计算精度。

3 大规模并行求解中的修正方法探讨

随着当前大规模并行求解技术的进展和高性能计算机的出现, 大规模复杂数值模拟逐渐成为现实, 并行计算技术也成为了当前研究的热点, 将模态叠加法的修正技术用于大规模并行求解也变得可能。并行计算是一种在计算机系统上进行问题求解时, 由计算机硬件、或计算机软件与硬件协作, 将多个无依赖关系的数据处理操作提交给不同的数学/逻辑处理单元同时执行的技术。利用这一技术, 可以有效提高模态分析的效率, 降低数据处理的成本。近年来, 大规模并行计算软件也逐渐发展起来。

目前比较典型的大规模并行计算软件有 SIERRA^[39] 框架和 TSV^[40] 系列等软件。SIERRA 框架是美国圣地亚实验室在“ASC 计划”支持下研制的工程力学仿真框架, 其中动力学模块以 SALINAS^[41] 为主要代表, 具备模态/复模态分析、瞬态时域分析、频响分析以及随机振动 PSD 分析等动力学大规模并行分析能力, 并逐步延伸到声振耦合动力学以及非线性动力学分析领域。日本的 TSV 系列软件包含了前处理 (TSV-Pre)、后处理 (TSV-Post) 以及核心解法器 (TSV-Solver) 等部分, 采用基于分级区域分解的粗网格共轭梯度核心算法, 可实现上亿自由度规模的模型离散及数千可扩展 CPU 核的结构力学分析。

2007 年以来, 中国工程物理研究院在面向非结构网格有限元结构力学应用软件的开发实践中, 借鉴 SIERRA 集成环境的设计思想, 通过并行算法研究与软件开发, 形成了并行非结构网格与应用平台 PANDA^[42-43]。2013 年起, PANDA 研发团队在 JAUMIN 框架数据结构基础上对其又进行了重构和优化, 形成了较为完善的并行计算平台, 目前主要包含 PANDA-StaVib 和 PANDA-Impact 两大类软件。其中动力学分析主要是基于模态叠加法开展。

从修正方法来看, 模态加速度法是大规模并行计算中最容易实现的一种计算方法。该方法对高阶响应的贡献通过额外求解一个大规模线性方程组而得到相应的修正项, 这对于大规模并行计算来说是一种非常容易实现的计算途径, 并在美国圣地亚 SIERRA 框架下 Salinas 软件中有所采用, 在目前中物院的 PANDA 平台中同样可以快速实现。

4 结语

模态叠加法作为结构动力学分析的经典方法, 有着十分广泛的应用。由于其截断高阶模态保留低阶模态的特性, 高阶模态的影响被忽略, 使得其精度不高, 因此有必要对模态叠加法进行修正。

目前基于模态叠加法的修正方法主要有模态加速度法、动态修正方法和力求导方法。其中模态加速

度法是目前最接近工程实际的一种修正方法, 该方法用准静态项对高阶模态进行弥补, 从而用较少的模态获得较为精确的结果。理论上, 动态修正方法和力求导方法计算结果比模态加速度法更为精确, 但是都存在一些条件限制, 至今仍停留在简单的数值算例阶段, 尚未见其在大规模并行计算中应用。

参考文献:

- [1] RAYLEIGH J W S, LINDSAY R B. The Theory of Sound, Two Volumes in One[M]. New York: Dover Publications Inc, 1945.
- [2] FOSS K A. Coordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems[J]. J Appl Mechanics, 1958, 25: 361-364.
- [3] FAWZY I, BISHOP R E D. On the Dynamics of Linear Non-conservative Systems[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1976, 352(1668): 25-40.
- [4] JOHANSSON C, PACOSTE C, KAROUMI R. Closed-form Solution for the Mode Superposition Analysis of the Vibration in Multi-span Beam Bridges Caused By Concentrated Moving Loads[M]. Oxford: Pergamon Press Inc, 2013.
- [5] 彭家坤. 基于非线性振型叠加法的框架动力分析[J]. 低温建筑技术, 2016, 38(3): 52-54.
- [6] 陈华霆, 谭平, 和雪峰, 等. 振型叠加法合理振型数目的确定[J]. 应用力学学报, 2017, 34(3): 404-409.
- [7] WILLIAMS D. Displacements of a Linear Elastic System under Given Transient Load[J]. Aeronautical Quarterly, 1949, 1: 123.
- [8] MADDOX N R. On the Number of Modes Necessary for the Accurate Response and Resulting Forces in Dynamic Analyses[J]. Journal of Applied Mechanics ASME, 1975, 42: 516-517.
- [9] HANSTEEN O E, BELL K. On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1979, 7: 405-411.
- [10] CORNWELL R E, CRAIG J R R R, JOHNSON C P. On the Application of the Mode-acceleration Method to Structural Engineering Problems[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1983, 11: 679-688.
- [11] ROY R C, ANDREW J, KURDILA J. Fundamentals of Structural Dynamics[M]. New York: John Wiley & Sons, 2006.
- [12] LEGER P, WILSON E L. Modal Summation Methods for Structural Dynamic Computations[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1988, 16: 23-27.
- [13] DICKENS J M. Numerical Methods for Dynamic Substructure Analysis[J]. 1982.
- [14] DICKENS J M, POOL K V. Modal Truncation Vectors and Periodic Time Domain Analysis Applied to a Cyclic Symmetry Structure[J]. Computers & Structures, 1992, 45(4): 685-696.

- [15] DICKENS J M, NAKAGAWA J M, WITTBRODT M J. A Critique of Mode Acceleration and Modal Truncation Augmentation Methods for Modal Response Analysis[J]. *Computers & Structures*, 1997, 62(6): 985-998.
- [16] 王文亮, 杜作润. 结构振动与动态子结构方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1985.
- [17] 倪振华. 模态加速度法的实质及其与模态综合的关系[J]. *西安交通大学学报*, 1993, 27(1): 57-62.
- [18] KULKARNI S M, NG S F. Inclusion of Higher Modes in the Analysis of Non-classically Damped Systems[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2010, 21(6): 543-549.
- [19] CLOUGH R W, MOJTAHEDI S. Earthquake Response Analysis Considering Non-proportional Damping[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1976, 4(5): 489-496.
- [20] 方勇, 倪振华, 谢壮宁. 模态加速度法在屋盖结构风致响应分析中的应用[J]. *应用力学学报*, 2004(2): 122-124.
- [21] 方勇. 模态加速度法在大跨屋盖风荷载及其动态响应中的应用[J]. 汕头: 汕头大学, 2003.
- [22] MURTAGH P J, BASU B, BRODERICK B M. Mode Acceleration Approach for Rotating Wind Turbine Blades[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 2004, 218(3): 159-167.
- [23] ZHANG W, LIU H, GAO T. Topology Optimization of Large-scale Structures Subjected to Stationary Random Excitation: An Efficient Optimization Procedure Integrating Pseudo Excitation Method and Mode Acceleration Method[J]. *Computers & Structures*, 2015, 158: 61-70.
- [24] BORINO G, MUSCOLINO G. Mode-superposition Methods in Dynamic Analysis of Classically and Non-classically Damped Linear Systems[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1986, 14(5): 705-717.
- [25] ANTONINO D A, GIUSEPPE M. Improved Dynamic Correction Method in Seismic Analysis of Both Classically and Non-classically Damped Structures[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2001, 30(4): 501-517.
- [26] BILELLO C, PAOLA M D, SALAMONE S. A Correction Method for Dynamic Analysis of Linear Continuous Systems[J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(8-9): 662-670.
- [27] LEUNG Y T. An Accurate Method of Dynamic Condensation in Structural Analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, 12(11): 1705-1715.
- [28] CAMARDA C J, HAFTKA R T, RILEY M F. An Evaluation of Higher-order Modal Methods for Calculating Transient Structural Response[J]. *Computers & Structures*, 1987, 27(1): 89-101.
- [29] AKGUN M A. A New Family of Mode-superposition Methods for Response Calculations[J]. *Journal of Sound and Vibration* 1993, 167(2): 289-302.
- [30] RIXEN D. A Lanczos Procedure for Efficient Mode Superposition in Dynamic Analysis[C]//Aiaa/asme/asce/ahs/asc Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. [s. l.]: [s. n.], 2013.
- [31] LIU Z S, WANG K, HUANG C, et al. An Extended Hybrid Method for Contribution due to Truncated Lower and Higher-frequency Modes in Modal Summation[J]. *Engineering Structures*, 1996, 18(7): 558-563.
- [32] LIU Z S, CHEN S H, LIU W T, et al. An Accurate Modal Method for Computing Responses to Harmonic Excitation[J]. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1994(9): 11-13.
- [33] LI L, HU Y, WANG X. Accurate Method for Harmonic Responses of Non-classically Damped Systems in the Middle Frequency Range[J]. *Journal of Vibration & Control*, 2014, 22(2):426-441.
- [34] LI L, HU Y, DENG W, et al. Dynamics of Structural Systems with Various Frequency-dependent Damping Models[J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2015, 10(1): 48-63.
- [35] LI L, HU Y J, WANG X L, et al. Computation of Eigen-solution Derivatives for Nonviscously Damped Systems Using the Algebraic Method[J]. *Aiaa Journal*, 2012, 50(10): 2282-2284.
- [36] 曲乃泗, 魏建国, 杨春秋. 高阶振型对结构动力分析的影响[J]. *大连理工大学学报*, 1989(1): 113-118.
- [37] 曲乃泗, 沙德松. 修正振型叠加法在动力分析中的应用[J]. *地震工程与工程振动*, 1988(1): 100-110.
- [38] 黄泽坤. 振型叠加法的修正及其在子结构中的应用[J]. *振动与冲击*, 1989(2): 28-35.
- [39] SNL. Parallel Adaptivity in the SIERRA Computational Mechanics Framework[R]. SAND2003-4141p, 2003.
- [40] OGINO M, SHIOYA R, KAWAI H. Seismic Response Analysis of Nuclear Pressure Vessel Model with ADVENTRUE System on the Earth Simulator[J]. *Journal of the Earth Simulator*, 2005, 2(3):41-54.
- [41] REESE G M. Salinas-Theory Manual Version 4.22[M/OL], SAND2011-8272, 2011.
- [42] LIU Q K, ZHAO W B, CHENG J, et al. A Programming Framework for Large Scale Numerical Simulations on Unstructured Mesh[C]// IEEE 2nd International Conference on High Performance and Smart Computing. New York: [s. n.], 2016.
- [43] FAN X H, WU R A, CHEN P, et al. Parallel Computing of Large Eigenvalue Problems for Engineering Structures[C]// International Conference on Future Computer Sciences and Application. [s. l.]: IEEE Computer Society, 2011.