有限水域棒束附连水质量计算方法

谢腾，刘建湖，王海坤
（中国船舶科学研究中心，江苏 无锡 214082）

摘要：目的 给棒束型核反应堆等类似结构的抗冲击性能设计提供一定理论依据。**方法** 首先通过势流理论计算得出单棒速度势，再利用泰勒展开和坐标变换数学方法计算得出棒束在流体中产生的总势，继而导出棒束的附连水质量。**结果** 从公式中获得了棒束附连水质量与棒距边界距离、棒间距、棒数及棒各阶模态之间的相互关系。**结论** 该公式经有限元仿真计算和试验验证是合理的，可作为棒束型反应堆等类似结构抗冲击设计的依据。

关键词： 棒束；有限水域；流致振动；附连水质量
DOI： 10.7643/ issn.1672-9242.2019.02.022
中图分类号： TL334 **文献标识码：** A
文章编号： 1672-9242(2019)02-0107-08

Methods for Evaluating Added Masses of a Group of Circular Cylinders in Confined Fluid

XIE Teng, *LIU Jian-hu*, *WANG Hai-kun*
(China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214028, China)

ABSTRACT: Objective To provide certain theoretical basis for shock resistance design of circular cylinders and similar structures. **Methods** Firstly, the velocity potential of a stick was calculated by the potential flow theory. Secondly, the total velocity potential of sticks was calculated by Taylor expansion and coordinate transformation and to finally get the added mass. **Results** The relationship between the added mass and the distance between the cylinder and the boundary, the distance between the cylinders, the number of cylinders and different modes was obtained from the formula. **Conclusion** This formula is verified by finite element simulation calculation and experiment. It can be used in the design of circular cylinders and similar shock resistance structures

KEY WORDS: circular cylinders; confined fluid; flow-induced vibration; added masses

近年来，棒束型核反应堆的应用领域越来越广泛。在某些工况下，核反应堆会受到冲击载荷，所以核反应堆的抗冲击性能需满足一定要求，核燃料棒是核反应堆中的关键部件。同时由于其细长的结构特点也最易被破坏，故研究核燃料棒的抗冲击性能是核心。

核反应堆模型可简化为一个圆柱型外壳，内部平行排列许多圆柱棒束，外壳与棒束之间充满流体。对于以该模型为代表的有限水域棒束附连水质量的计算研究始于 20 世纪 70 年代，S S Chen 研究了有限水域静止流体中棒束流致振动模型[1-2]。蒋莉等人在 S S Chen 的研究基础上附加了流体轴向流动条件[3]，但是上述研究都只局限于棒为刚体[4]。在冲击条件下，棒束的各阶模态相互之间的影响不可忽略。文中在上述工作的基础上，深入探究了棒束各阶模态之间相互影响的规律，最后推导得出附连水质量与棒距边界距离、棒间距、棒数及棒各阶模态之间的相互关系的公式。利用有限元计算和试验验证了该公式的正确性，为以后类似结构的设计提供理论依据。

收稿日期： 2018-11-22；**修订日期：** 2018-12-16
作者简介： 谢腾（1991—），男，硕士研究生，主要研究方向为舰船结构设计。
通讯作者： 刘建湖（1963—），男，研究员，主要研究方向为舰船抗爆抗冲击。

1　理论计算

圆柱型外壳内平行排列着许多圆柱棒束，外壳与棒束之间充满静止、无粘无旋、不可压缩的流体，如图 1 所示，轴垂直于 x-y 平面。

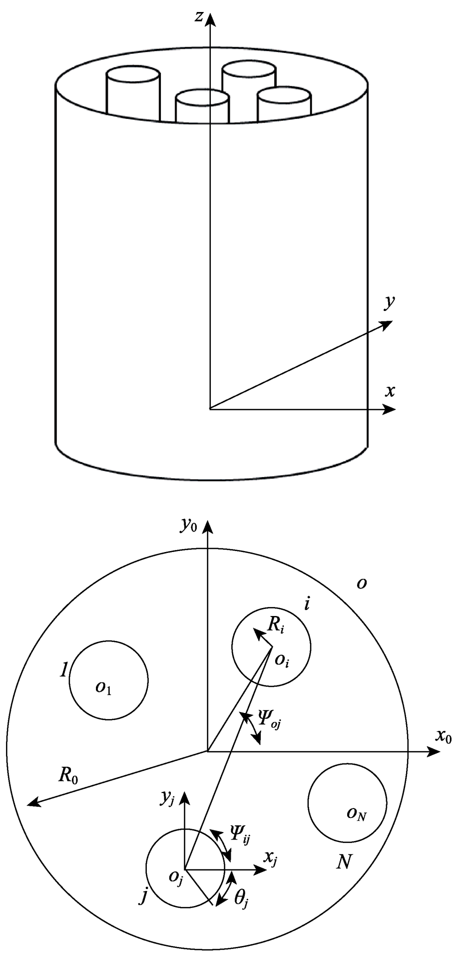

图 1　简化模型

因为核反应堆中核燃料棒若出现大变形，则整个结构将会遭到毁灭性损坏，所以这里只考虑小变形问题。记圆柱外壳编号为 0，内部有 N 根圆柱棒，编号依次为 1—N,外圆柱壳产生的速度势可表示为[5-6]：

$$\phi_0=\sum_{p=0}^{\infty}\phi_{0(p)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n}{R_0^{n-1}}\left(a_{0(p)n}\cos n\theta_0+b_{0(p)n}\sin n\theta_0\right) \tag{1}$$

内部圆柱棒 j 产生的速度势可以表示为：

$$\phi_j=\sum_{p=0}^{\infty}\phi_{j(p)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_j^{n+1}}{R_j^n}\left(a_{j(p)n}\cos n\theta_j+b_{j(p)n}\sin n\theta_j\right) \tag{2}$$

$$\left(j=1,2,\cdots,N\right)$$

式（1）和式（2）中(r_0,θ_0)和(r_j,θ_j)分别为圆柱外壳和内部圆柱棒的局部坐标，$a_{0(p)n}$、$b_{0(p)n}$、$a_{j(p)n}$、$a_{j(p)n}$是待定常数。由势的可叠加性可知，流体中总势为各个棒产生的势之和，可表示为：

$$\phi=\sum_{j=0}^{N}\phi_j \tag{3}$$

由二维势流理论可知，总势满足拉普拉斯方程[7]：

$$\Delta\phi=\sum_{j=0}^{N}\Delta\phi_j=0 \tag{4}$$

由于总势在外壳和各个圆柱棒边界上的边界条件不同，故需将总势通过坐标变换转化到各个圆柱棒的局部坐标上表示，再代入边界条件求解待定常数。

由泰勒展开将 j 圆柱棒的 p 阶模态振动产生的速度势转化到外壳对应局部坐标下可得：

$$\phi_{j(p)}^0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n+m-1)!R_j^{n+1}R_{0j}^m}{m!(n-1)!r_0^{m+n}}\cdot\left\{a_{j(p)n}\cos\left[m\Psi_{0j}-(n+m)\theta_0\right]-b_{j(p)n}\sin\left[m\Psi_{0j}-(n+m)\theta_0\right]\right\}(j=1,2,\cdots,N) \tag{5}$$

或

$$\phi_{j(p)}^0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+m-1)!R_j^{n+1}r_0^m}{m!(n-1)!R_{0j}^{m+n}}\cdot\left\{a_{j(p)n}\cos\left[m\theta_0-(n+m)\Psi_{0j}\right]-b_{j(p)n}\sin\left[m\theta_0-(n+m)\Psi_{0j}\right]\right\}(j=1,2,\cdots,N) \tag{6}$$

若圆柱棒与外壳同心，则坐标变换后可得：

$$\phi_{j(p)}^0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_j^{n+1}}{r_0^n}\left\{a_{j(p)n}\cos n\theta_0+b_{j(p)n}\sin n\theta_0\right\} \tag{7}$$

由泰勒展开将外壳产生的速度势转化到圆柱棒 i 对应坐标下可得：

$$\phi_{0(p)}^i=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!R_{0i}^{n-m}r_i^m}{m!(n-1)!R_0^{n-1}}\cdot\left\{a_{0(p)n}\cos\left[m\theta_i+(n-m)\Psi_{0i}\right]+b_{0(p)n}\sin\left[m\theta_i+(n-m)\Psi_{0i}\right]\right\}(j=1,2,\cdots,N) \tag{8}$$

若圆柱棒与外壳同心，则坐标变换后可得：

$$\phi_{0(p)}^i=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_i^n}{R_0^{n-1}}\left\{a_{0(p)n}\cos n\theta_i+b_{0(p)n}\sin n\theta_i\right\} \tag{9}$$

由泰勒展开将圆柱棒 j 产生的速度势转化到圆柱棒 i 对应坐标下可得：

$$\phi_{j(p)}^i=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+m-1)!R_j^{n+1}r_i^m}{m!(n-1)!R_{ij}^{m+n}}\cdot\left\{a_{j(p)n}\cos\left[m\theta_i-(n+m)\Psi_{ij}\right]+b_{i(p)n}\sin\left[m\theta_i-(n+m)\Psi_{ij}\right]\right\}(j=1,2,\cdots,N) \tag{10}$$

假设编号为 1 的棒与外壳同轴，编号为 2—N 的

棒在外壳内部任意不同轴位置，则流体中在 i 棒局部坐标下表示的总势为：

$$\phi^i = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_{j(p)} + \sum_{j=0}^{N*} \sum_{p=0}^{\infty} \phi^i_{j(p)} \quad (i = 0,1,\cdots,N) \tag{11}$$

式中：$\sum_{j=0}^{N*}$ 表示 j 从 0 取到 N，除了 j=i。

i 棒在 x 向和 y 向的位移分别表示为 u_i、v_i [8]：

$$u_i = \sum_{p=1}^{\infty} u_i^{(p)} = \sum_{p=0}^{\infty} Z_{ix}^{(p)}(z_0) e^{i\left(\omega_i^{(p)}t + \varphi_{ix}^{(p)}\right)} \tag{12}$$

$$v_i = \sum_{p=1}^{\infty} v_i^{(p)} = \sum_{p=0}^{\infty} Z_{iy}^{(p)}(z_0) e^{i\left(\omega_i^{(p)}t + \varphi_{iy}^{(p)}\right)} \tag{13}$$

式中：$u_i^{(0)}$、$v_i^{(0)}$ 分别为 i 棒在 x、y 方向上的刚体位移，上标 0 表示 0 模态，即刚体运动；$u_i^{(p)}$、$v_i^{(p)}$ 分别为 i 棒在 x、y 方向上的 p 阶模态位移；$Z_{ix}^{(p)}(z_0)$、$Z_{iy}^{(p)}(z_0)$ 分别为 i 棒在 x、y 方向上振型函数在 z=z_0 处的值；$\omega_i^{(p)}$ 为 i 棒的 p 阶模态频率；$\varphi_{ix}^{(p)}$、$\varphi_{iy}^{(p)}$ 为 i 棒在 x、y 方向上 p 阶振动的相位。

流体在各个 i 棒径向流固交界面处满足[9]：

$$V^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial r_i} \quad (i = 0,1,\cdots,N) \tag{14}$$

同时由于流固交界面处流体满足无渗透边界条件，故：

$$V^i = \frac{\partial u_i}{\partial t}\cos\theta_i + \frac{\partial v_i}{\partial t}\sin\theta_i \quad (i = 0,1,\cdots,N) \tag{15}$$

代入式（10）、（11）后可得：

$$V^i = \sum_{p=0}^{\infty} i\omega_i^p \left(Z_{ix}^p(z_0) e^{i\left(\omega_i^{(p)}t + \varphi_{ix}^{(p)}\right)} \cos\theta_i + Z_{iy}^p(z_0) e^{i\left(\omega_i^{(p)}t + \varphi_{iy}^{(p)}\right)} \sin\theta_i \right) \tag{16}$$

设：

$$a_{i(p)n} = \sum_{l=0}^{N} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\alpha_{i(p)n}^{l(r)} u_l^{(r)} + \sigma_{i(p)n}^{l(r)} v_l^{(r)} \right) \tag{17}$$

$$b_{i(p)n} = \sum_{l=0}^{N} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\tau_{i(p)n}^{l(r)} u_l^{(r)} + \beta_{i(p)n}^{l(r)} v_l^{(r)} \right) \tag{18}$$

其中 $\alpha_{i(p)n}^{l(r)}$、$\sigma_{i(p)n}^{l(r)}$、$\tau_{i(p)n}^{l(r)}$、$\beta_{i(p)n}^{l(r)}$ (r=0,1,$\cdots$,∞) 可由式（19）—（22）求得。

当 i=0 时，将式（1）、（2）、（5）、（6）代入式（10）、（13）、（14）中可得：

$$n\alpha_{0(p)n}^{l(r)} - n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} \alpha_{1(p)n}^{l(r)} - \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{R_j^{n-m+1} R_{0j}^m n!}{R_0^{n+1} m!(n-m+1)!} \cdot \left(\alpha_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \cos m\psi_{0j} - \tau_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \sin m\psi_{0j}\right) = i\omega_0^p \delta_{l0} \delta_{pr} \delta_{n1} \tag{19}$$

$$n\sigma_{0(p)n}^{l(r)} - n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} \sigma_{1(p)n}^{l(r)} - \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{R_j^{n-m+1} R_{0j}^m n!}{R_0^{n+1} m!(n-m+1)!} \cdot \left(\sigma_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \cos m\psi_{0j} - \beta_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \sin m\psi_{0j}\right) = 0 \tag{20}$$

$$n\tau_{0(p)n}^{l(r)} - n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} \tau_{1(p)n}^{l(r)} - \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{R_j^{n-m+1} R_{0j}^m n!}{R_0^{n+1} m!(n-m+1)!} \cdot \left(\alpha_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \sin m\psi_{0j} + \tau_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \cos m\psi_{0j}\right) = 0 \tag{21}$$

$$n\beta_{0(p)n}^{l(r)} - n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} \beta_{1(p)n}^{l(r)} - \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{R_j^{n-m+1} R_{0j}^m n!}{R_0^{n+1} m!(n-m+1)!} \cdot \left(\sigma_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \sin m\psi_{0j} + \beta_{j(p)(n-m)}^{l(r)} \cos m\psi_{0j}\right) = i\omega_0^p \delta_{l0} \delta_{pr} \delta_{n1} \tag{22}$$

当 i=1 时，将等式（1）、（2）、（8）、（9）代入等式（10）、（13）、（14）中得：

$$n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-1} \alpha_{0(p)n}^{l(r)} - n\alpha_{1(p)n}^{l(r)} + \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_1^{n-1} R_j^{m+1} (-1)^m (m+n-1)!}{R_{0j}^{n+m} (m-1)!(n-1)!} \cdot \left[\alpha_{j(p)m}^{l(r)} \cos(n+m)\psi_{0j} + \tau_{j(p)m}^{l(r)} \sin(n+m)\psi_{0j}\right] = i\omega_1^p \delta_{l1} \delta_{pr} \delta_{n1} \tag{23}$$

$$n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-1} \sigma_{0(p)n}^{l(r)} - n\sigma_{1(p)n}^{l(r)} + \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_1^{n-1} R_j^{m+1} (-1)^m (m+n-1)!}{R_{0j}^{n+m} (m-1)!(n-1)!} \cdot \left[\sigma_{j(p)m}^{l(r)} \cos(n+m)\psi_{0j} + \beta_{j(p)m}^{l(r)} \sin(n+m)\psi_{0j}\right] = 0 \tag{24}$$

$$n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-1} \tau_{0(p)n}^{l(r)} - n\tau_{1(p)n}^{l(r)} + \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_1^{n-1} R_j^{m+1} (-1)^m (m+n-1)!}{R_{0j}^{n+m} (m-1)!(n-1)!} \cdot \left[\alpha_{j(p)m}^{l(r)} \sin(n+m)\psi_{0j} - \tau_{j(p)m}^{l(r)} \cos(n+m)\psi_{0j}\right] = 0 \tag{25}$$

$$n\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-1} \beta_{0(p)n}^{l(r)} - n\beta_{1(p)n}^{l(r)} + \sum_{j=2}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_1^{n-1} R_j^{m+1} (-1)^m (m+n-1)!}{R_{0j}^{n+m} (m-1)!(n-1)!} \cdot \left[\sigma_{j(p)m}^{l(r)} \sin(n+m)\psi_{0j} - \beta_{j(p)m}^{l(r)} \cos(n+m)\psi_{0j}\right] = i\omega_1^p \delta_{l1} \delta_{pr} \delta_{n1} \tag{26}$$

式中：l=0,1,…,N；n=1,2,…, ∞ ；r=0,1,…, ∞ ；p=0,1,…, ∞ 。

当 i≥2 时，将等式（1）、（2）、（7）、（9）代入等式（10）、（13）、（14）中得：

$$-n\alpha_{i(p)n}^{l(r)}+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{R_{0i}^{m-n}R_i^{n-1}m!}{R_0^{m-1}(m-n)!(n-1)!}\cdot[\alpha_{0(p)m}^{l(r)}\cos(m-n)\psi_{0i}+\tau_{0(p)m}^{l(r)}\sin(m-n)\psi_{0i}]+\sum_{j=2}^{N*}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_i^{n-1}R_j^{m+1}(-1)^m(m+n-1)!}{R_{ij}^{n+m}(m-1)!(n-1)!}\cdot[\alpha_{j(p)m}^{l(r)}\cos(n+m)\psi_{ij}+\tau_{j(p)m}^{l(r)}\sin(n+m)\psi_{ij}]=i\omega_i^p\delta_{li}\delta_{pr}\delta_{n1} \tag{27}$$

$$-n\sigma_{i(p)n}^{l(r)}+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{R_{0i}^{m-n}R_i^{n-1}m!}{R_0^{m-1}(m-n)!(n-1)!}\cdot[\sigma_{0(p)m}^{l(r)}\cos(m-n)\psi_{0i}+\beta_{0(p)m}^{l(r)}\sin(m-n)\psi_{0i}]+\sum_{j=2}^{N*}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_i^{n-1}R_j^{m+1}(-1)^m(m+n-1)!}{R_{ij}^{n+m}(m-1)!(n-1)!}\cdot[\sigma_{j(p)m}^{l(r)}\cos(n+m)\psi_{ij}+\beta_{j(p)m}^{l(r)}\sin(n+m)\psi_{ij}]=0 \tag{28}$$

$$-n\tau_{i(p)n}^{l(r)}+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{R_{0i}^{m-n}R_i^{n-1}m!}{R_0^{m-1}(m-n)!(n-1)!}\cdot[-\alpha_{0(p)m}^{l(r)}\sin(m-n)\psi_{0i}+\tau_{0(p)m}^{l(r)}\cos(m-n)\psi_{0i}]+\sum_{j=2}^{N*}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_i^{n-1}R_j^{m+1}(-1)^m(m+n-1)!}{R_{ij}^{n+m}(m-1)!(n-1)!}\cdot[\alpha_{j(p)m}^{l(r)}\sin(n+m)\psi_{ij}-\tau_{j(p)m}^{l(r)}\cos(n+m)\psi_{ij}]=0 \tag{29}$$

$$-n\beta_{i(p)n}^{l(r)}+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{R_{0i}^{m-n}R_i^{n-1}m!}{R_0^{m-1}(m-n)!(n-1)!}\cdot[-\sigma_{0(p)m}^{l(r)}\sin(m-n)\psi_{0i}+\beta_{0(p)m}^{l(r)}\cos(m-n)\psi_{0i}]+\sum_{j=2}^{N*}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_i^{n-1}R_j^{m+1}(-1)^m(m+n-1)!}{R_{ij}^{n+m}(m-1)!(n-1)!}\cdot[\sigma_{j(p)m}^{l(r)}\sin(n+m)\psi_{ij}-\beta_{j(p)m}^{l(r)}\cos(n+m)\psi_{ij}]=i\omega_i^p\delta_{li}\delta_{pr}\delta_{n1} \tag{30}$$

当没有与外壳同心的圆柱棒时，则去除方程（22）—（25），求解该系列方程组时，因为考虑到模态越高，影响越小，故 r、p 取前几阶。这里因为方程随着 n 的增大会很快达到收敛，故速度势取有限项。流体作用在外壳和圆柱棒上的力在 x 和 y 方向上可分别表示为：

$$F_{ix}=\int_0^{2\pi}P^i\Big|_{r_i=R_i}\cdot R_i\cos\theta_i\mathrm{d}\theta_i\quad(i=0,1,...,N)$$
$$F_{iy}=\int_0^{2\pi}P^i\Big|_{r_i=R_i}\cdot R_i\sin\theta_i\mathrm{d}\theta_i\quad(i=0,1,...,N) \tag{31}$$

式中：$P=-\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$，$\rho$ 为流体密度。代入式（10）和（18）—（29），可得：

$$F_{ix}=\rho\pi R_i^2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{N}\sum_{r=0}^{\infty}(\alpha_{i(p)}^{l(r)}\frac{\partial^2u_l^{(r)}}{\partial t^2}+\sigma_{i(p)}^{l(r)}\frac{\partial^2v_l^{(r)}}{\partial t^2}) \tag{32}$$

$$F_{iy}=\rho\pi R_i^2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{N}\sum_{r=0}^{\infty}(\tau_{i(p)}^{l(r)}\frac{\partial^2u_l^{(r)}}{\partial t^2}+\beta_{i(p)}^{l(r)}\frac{\partial^2v_l^{(r)}}{\partial t^2}) \tag{33}$$

其中 $\alpha_{i(p)}^{l(r)}$、$\sigma_{i(p)}^{l(r)}$、$\tau_{i(p)}^{l(r)}$、$\beta_{i(p)}^{l(r)}$ 即为附连水质量系数。

当 i=0 时：

$$\alpha_{0(p)}^{l(r)}=\frac{1}{\omega_l^r}\sum_{j=0}^{N}(\frac{R_j}{R_0})^2\alpha_{j(p)1}^{l(r)} \tag{34}$$

$$\beta_{0(p)}^{l(r)}=\frac{1}{\omega_l^r}\sum_{j=0}^{N}(\frac{R_j}{R_0})^2\beta_{j(p)1}^{l(r)} \tag{35}$$

$$\sigma_{0(p)}^{l(r)}=\frac{1}{\omega_l^r}\sum_{j=0}^{N}(\frac{R_j}{R_0})^2\sigma_{j(p)1}^{l(r)} \tag{36}$$

$$\tau_{0(p)}^{l(r)}=\frac{1}{\omega_l^r}\sum_{j=0}^{N}(\frac{R_j}{R_0})^2\tau_{j(p)1}^{l(r)} \tag{37}$$

当 i=1 时：

$$\alpha_{1(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\alpha_{0(p)1}^{l(r)}+\alpha_{1(p)1}^{l(r)}+\sum_{j=2}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{1j}})^{n+1}\cdot\left[\alpha_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{0j}+\tau_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{0j}\right] \tag{38}$$

$$\beta_{1(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\beta_{0(p)1}^{l(r)}+\beta_{1(p)1}^{l(r)}+\sum_{j=2}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{1j}})^{n+1}\cdot\left[\sigma_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{0j}+\beta_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{0j}\right] \tag{39}$$

$$\sigma_{1(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\sigma_{0(p)1}^{l(r)}+\sigma_{1(p)1}^{l(r)}+\sum_{j=2}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{1j}})^{n+1}\cdot\left[\sigma_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{0j}+\beta_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{0j}\right] \tag{40}$$

$$\tau_{1(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\tau_{0(p)1}^{l(r)}+\tau_{1(p)1}^{l(r)}+\sum_{j=2}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{1j}})^{n+1}\cdot\left[\alpha_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{0j}-\tau_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{0j}\right] \tag{41}$$

当 i≥2 时：

$$\alpha_{i(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\alpha_{i(p)1}^{l(r)}+\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{R_{0i}}{R_0})^{n-1}\cdot\left[\alpha_{0(p)n}^{l(r)}\cos(n-1)\psi_{0i}+\tau_{0(p)n}^{l(r)}\sin(n-1)\psi_{0i}\right]+\sum_{j=1}^{N*}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{ij}})^{n+1}\cdot\left[\alpha_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{ij}+\tau_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{ij}\right] \tag{42}$$

$$\beta_{i(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\beta_{i(p)1}^{l(r)}+\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{R_{0i}}{R_0})^{n-1}\cdot \left[-\sigma_{0(p)n}^{l(r)}\sin(n-1)\psi_{0i}+\beta_{0(p)n}^{l(r)}\cos(n-1)\psi_{0i}\right]+ \sum_{j=1}^{N^*}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{ij}})^{n+1}\cdot \left[\sigma_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{ij}+\beta_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{ij}\right] \tag{43}$$

$$\sigma_{i(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\sigma_{i(p)1}^{l(r)}+\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{R_{0i}}{R_0})^{n-1}\cdot \left[\sigma_{0(p)n}^{l(r)}\cos(n-1)\psi_{0i}+\beta_{0(p)n}^{l(r)}\sin(n-1)\psi_{0i}\right]+ \sum_{j=1}^{N^*}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{ij}})^{n+1}\cdot \left[\sigma_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{ij}+\beta_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{ij}\right] \tag{44}$$

$$\tau_{i(p)}^{l(r)}=\frac{-1}{\omega_l^r}(\tau_{i(p)1}^{l(r)}+\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{R_{0i}}{R_0})^{n-1}\cdot \left[-\alpha_{0(p)n}^{l(r)}\sin(n-1)\psi_{0i}+\tau_{0(p)n}^{l(r)}\cos(n-1)\psi_{0i}\right]+ \sum_{j=1}^{N^*}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(\frac{R_j}{R_{ij}})^{n+1}\cdot \left[\alpha_{j(p)n}^{l(r)}\sin(n+1)\psi_{ij}+\tau_{j(p)n}^{l(r)}\cos(n+1)\psi_{ij}\right] \tag{45}$$

在式(19)—(45)中，当 p=0 或 r=0 时，$\omega_i^p=1$，$\omega_l^r=1$，这并不代表刚体振动频率。任取其中两根棒编号为 i、j，若两棒反相位振动，则 $\varphi_{ix}^{(p)}=\varphi_{jx}^{(p)}+\pi$、$\varphi_{iy}^{(p)}=\varphi_{jy}^{(p)}+\pi$，从而可得 $\frac{\partial^2 u_i^{(p)}}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2 u_j^{(p)}}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^2 v_i^{(p)}}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2 v_j^{(p)}}{\partial t^2}$。代入方程(32)、(33)中可知，$\alpha_{i(p)}^{l(r)}$、$\sigma_{i(p)}^{l(r)}$、$\tau_{i(p)}^{l(r)}$、$\beta_{i(p)}^{l(r)}$ 符号相反，即棒与棒之间同相位振动和反相位振动对各自附加质量影响效果相反。

2　有限元仿真

文中使用 workbench 中的 modal 模块进行有限元计算仿真[10-11]，计算得出直径为 0.02 m 的两端简支棒在半径为 0.5 m 的圆柱型水域中作自由振动时的固有频率。单根棒距壁面不同距离的情况如图 2 所示，固有频率随着棒距边界距离的增大而增大，最终趋于稳定，等于单根棒在无限流域中自由振动频率，即附连水质量随棒距边界距离增大而减小。两根棒之间不同距离的情况如图 3—图 6 所示，两棒振动相位和振动方向相反，导致频率大小变化相反，且随着棒距增加变化减小趋于稳定。棒数不同的情况如图 7 所示，棒数增加，固有频率减小，即附连水质量增大。通过有限元计算可验证理论公式的合理性和正确性。

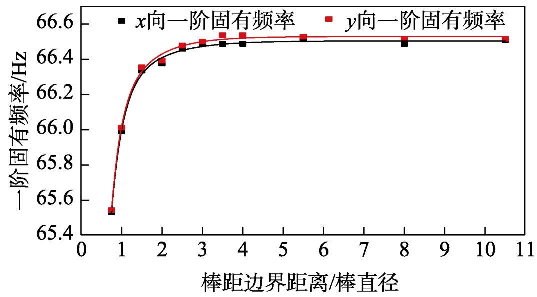

图 2　棒距边界距离与固有频率关系

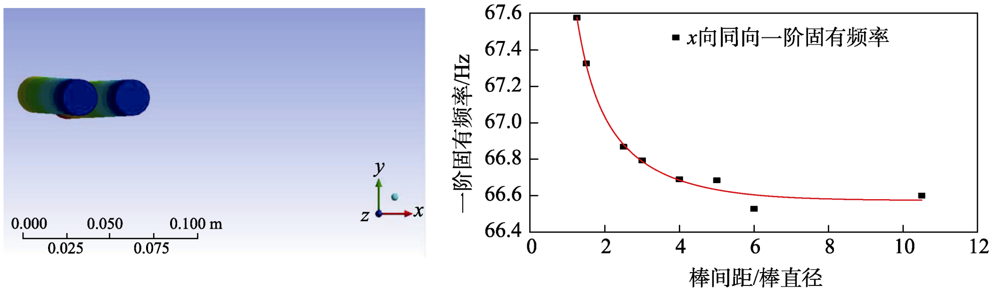

图 3　x 向同相位振动

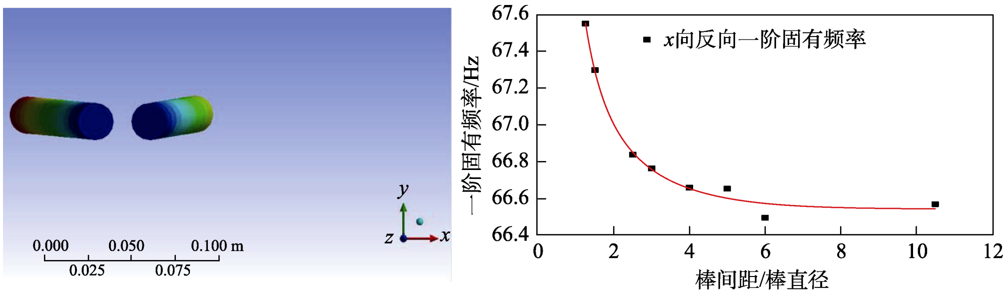

图 4　x 向反相位振动

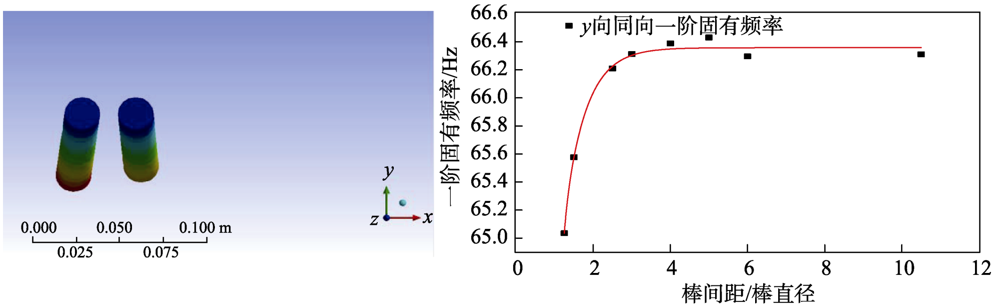

图 5 y 向同相位振动

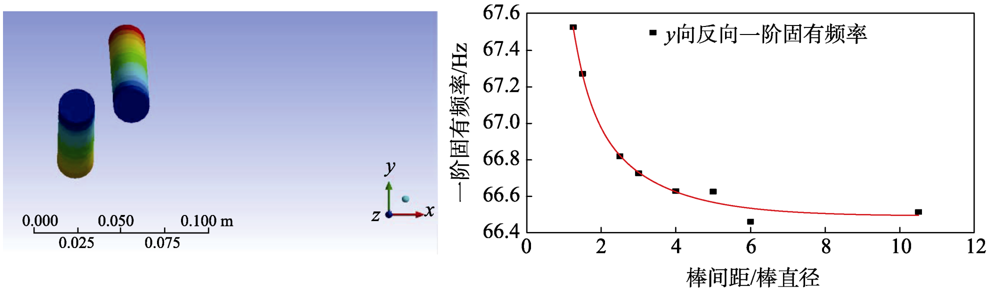

图 6 y 向反相位振动

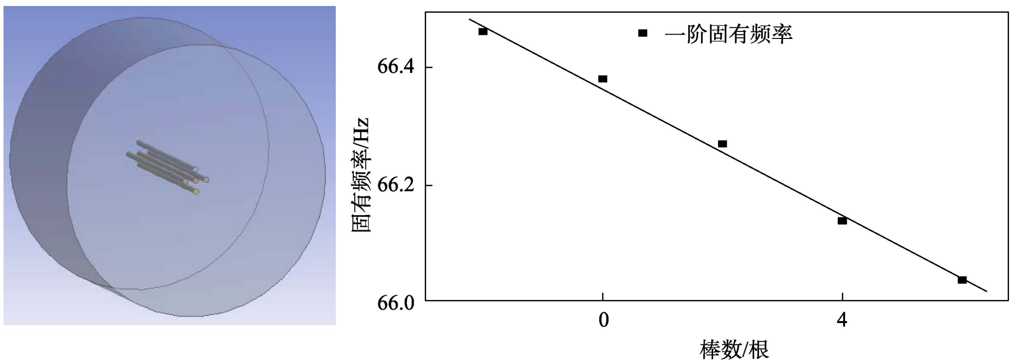

图 7 棒数与固有频率关系

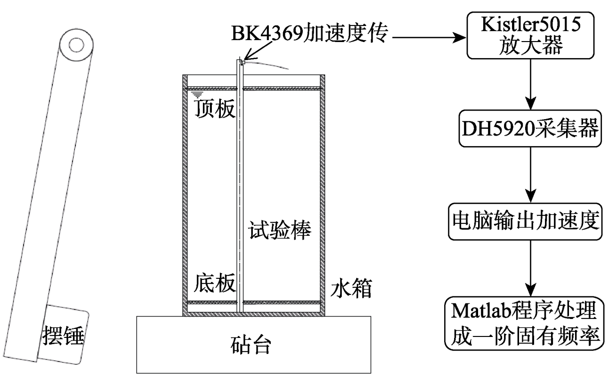

图 8 水平冲击试验模型及数据测量方法

3 水平冲击试验

3.1 试验模型及方法

水平冲击试验模型及测量方法如图 8 所示。水箱尺寸为 500 mm×320 mm×850 mm，水箱有足够壁厚，使其固有频率远大于棒的一、二、三阶。试验棒直径 D 为 20 mm，长为 850 mm，插入水箱后，通过上下两块金属板实现两端简支约束，约束中间有效长度为 750 mm，顶板孔编号如图 9 所示，其中 1—11 号和 19 号孔用来控制试验棒与边界的距离，12—23 号孔用来控制试验棒间距和试验棒数。冲击激励通过摆锤施加，冲击方向为 y 向，如图 10 所示，摆锤高度为 100 mm，砧台行程 15 mm。水平冲击试验包含了试验棒距边界的距离、棒间距和棒数对附连水质量系数影响三种情况。

3.2 试验结果

试验得到各种工况下试验棒的加速度，经过处理后得到各种工况下试验棒的一阶固有频率。试验棒在空气中受冲击时，测得其一阶频率为 70.89 Hz，最终测得试验棒在水中一阶固有频率与棒数的关系见表 1。固有频率与棒距离边界距离的关系见表 2。固有频率与棒间距的关系见表 3。将固有频率与棒距离边

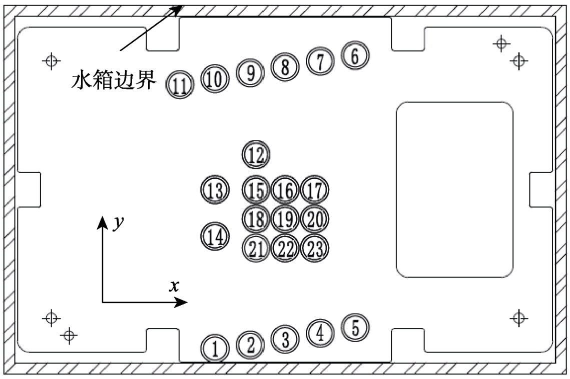

图 9　顶板孔编号

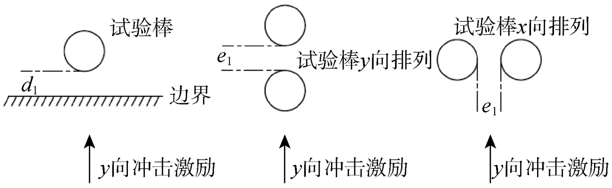

图 10　冲击激励方向

界距离的关系转化为附连水质量系数后如图 11 所示。将固有频率与棒间距的关系转化为附连水质量系数后如图 12 所示。

表 1　棒数的影响

孔编号	冲击方向	棒数/根	一阶固有频率/Hz	附连水质量系数
19	y 向	1	67.12	1
19、22	y 向	2	68.22	0.72
19、22、16	y 向	3	68.56	0.57
19、18	x 向	2	65.7	1.42
19、18、20	x 向	3	65.28	1.55

表 2　固有频率与棒距离边界距离的关系

孔编号	边界	d_1/D	一阶固有频率/Hz	冲击方向
2	AB	0.25	66.78	y 向
3	AB	0.5	66.94	
4	AB	0.75	67.14	
5	AB	1	67.09	
6	CD	1.25	67.28	
7	CD	1.5	67.25	
8	CD	1.75	67.27	
9	CD	2	67.34	
10	CD	2.25	67.3	
11	CD	2.5	67.33	
19	AB	6.125	67.31	

表 3　固有频率与棒间距的关系

两棒排列方向	孔编号	e_1/D	一阶固有频率/Hz	冲击方向
y 向	16—19	0.25	68.43	y 向
	12—15	0.5	68.11	
	13—14	1	67.56	
	16—22	1.5	67.27	
	12—18	1.75	67.12	
	12—21	3	67.02	
x 向	15—16	0.25	65.99	
	13—15	0.75	66.27	
	15—17	1.5	66.95	
	13—-16	2	67.02	
	13—17	3.25	67.06	

3.3　讨论

从图 11 可知，冲击情况下，附连水质量系数随着棒距离边界距离的增加而减小，直至距离大于 3 倍棒直径时趋于单棒在无限水域中的附连水质量系数。从图 12 可得，当两棒排列与冲击方向一致时（即两棒作 y 向同向振动），附连水质量系数随着棒间距的增大而增大，直至棒间距大于 3 倍棒直径时趋于 1。当两棒排列与冲击方向垂直时（即两棒作 x 向同向振动），附连水质量系数随着棒间距的增大而减小，直至棒间距大于 3 倍棒直径时趋于 1。

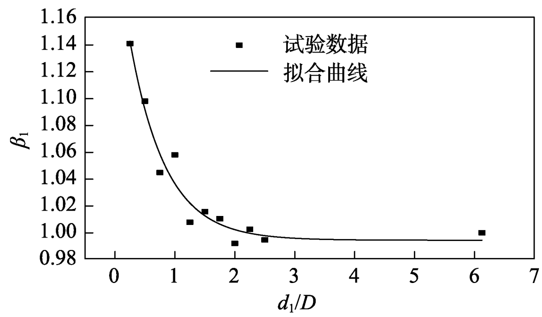

图 11　一阶模态附连水质量系数随棒距离边界距离的关系

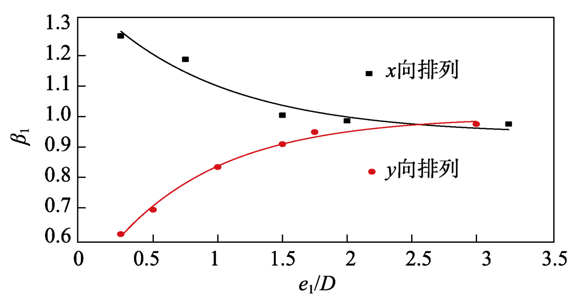

图 12　一阶模态附连水质量系数随棒间距的关系

4　结论

通过势流理论、泰勒展开和坐标变换等数学方法

计算得出有限水域棒束附连水质量理论公式。从公式可以得出，附连水质量随棒距边界距离增大而减小、随棒距的增大而减小、随棒数增加而增大。两棒同阶同相位振动与反相位振动的相互影响附连水质量系数异号，且可知若两棒沿 x 向排列，则 x 向同相位振动减小附连水质量，y 向同相位振动增加附连水质量。通过有限元软件计算验证了理论公式的正确性与合理性，最后通过一组水平冲击试验初步验证了棒距、棒间距对附连水质量的影响规律。因此，此公式可为相关模型设计提供理论参考依据。后续工作将考虑流体流动对附连水质量的影响，并且附加阻尼的问题也需进一步探讨。

参考文献：

[1] CHEN Shoei-sheng. Vibration of Nuclear Fuel Bundles[J]. Nucl Eng Des, 1975, 35: 393-399.

[2] CHUNG Ho, CHEN Shoei-sheng. Vibration of a Group of Circular Cylinders in Confined Fluid[J]. J Appl Mech,1977, 45: 4-17.

[3] 蒋莉, 王建立, 孙成海, 等. 有界域轴向流动棒束流致振动附加质量力模型[J]. 原子能科学技术, 1999, 33(5): 432-435.

[4] LU Dao-gang, LIU Ai-guo, SHANG Chao-hao, et al. Experimental Investigation on Fluid-structure-coupled Dynamic Characteristics of the Double Fuel Assemblies in a Fast Reactor[J]. Nuclear Engineering and Design, 2013, 255: 180-184.

[5] 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 等. 数学物理方程[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 47-49.

[6] JEAN F, DANIEL B. Homogenisation Method for the Dynamic Analysis of a Complete Nuclear Steam Generator with Fluid-structure Interaction[J]. Nuclear Engineering and Design, 2008, 238: 2261-2271.

[7] 吴望一. 流体力学(下册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1983: 24-32.

[8] 张准, 汪凤泉. 振动分析[M]. 南京: 东南大学出版社, 1991: 280-281.

[9] 张阿漫, 戴绍仕. 流固耦合动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011: 40-42.

[10] 宋学官, 蔡林, 张华. ANSYS 流固耦合分析与工程实例[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2012: 117-135.

[11] 姜峰, 郑云虎, 梁瑞, 等. 海洋立管湿模态振动分析[J]. 西南石油大学学报, 2015, 37(5): 21-25.