基于频率管理的装备振动环境适应性提升

王鹏辉，李哲，童军，朱元夫，王帅，洪良友

（北京强度环境研究所，北京 100076）

摘要：梳理总结了航天结构、轨道车辆和汽车等不同领域的频率设计、频率管理和模态匹配等方法，给出了频率管理的流程、准则和原则。基于频率管理的思路和原则，采用虚实结合的方法，对某火箭发动机蓄压器系统进行了结构动力学优化设计和验证。根据局部结构频率隔离准则，将蓄压器导管主要频率从 1826 Hz 降低到 1520 Hz，与激励源频率完全隔离。最终经过仿真计算分析和试验验证，满足实际使用环境的考核要求。采用频率管理的思路和方法能够切实提高装备的振动环境适应性水平。

关键词：频率；模态匹配；虚实结合；振动环境；有限元仿真

中图分类号：TB123 **文献标识码：**A **文章编号：**1672-9242(2021)09-0007-07

DOI：10.7643/ issn.1672-9242.2021.09.002

Improvement of Equipment Vibration Environment Adaptability Based on Frequency Management

WANG Peng-hui, LI Zhe, TONG Jun, ZHU Yuan-fu, WANG Shuai, HONG Liang-you

(Beijing Institute of Strength and Environment, Beijing 100076, China)

ABSTRACT: In order to improve the vibration environment adaptability of the equipment, this paper summarized the frequency management/mode matching methods in the fields of the aerospace, rail vehicles and automobiles, and gives the flow, method and principle of frequency management. Based on the idea and principle of frequency management, the structural dynamics optimization design of accumulators was carried out by combining virtual and real methods. After the improvement, the main frequency of the accumulator pipes was reduced from 1826 Hz to 1520 Hz, which is completely isolated from the excitation source frequency, which met the requirements of frequency management criteria. Finally, the test results show that the accumulator meets the assessment requirements of shipboard vibration environment. So the idea and method of frequency management can improve the vibration environment adaptability of the equipment.

KEY WORDS: frequency; mode matching; virtual-reality combination; vibration environment; finite-element simulation

装备在全寿命周期内会经历各种不同特征的振动环境。比如在运输、维修、工作、值班等过程中，经历的周期性激励、随机性激励、瞬态激励以及多种激励的综合等，不同的激励特征对装备的影响机理和破坏程度不同。当装备在振动环境下出现共振放大和系统间频率耦合时，很容易造成功能故障、疲劳损伤、强度破坏等问题。因此为了提高装备的振动环境适应性，必须避免装备在振动中出现共振或者放大系数较

收稿日期：2020-03-20；**修订日期：**2021-04-16

Received：2020-03-20；**Revised**：2021-04-16

作者简介：王鹏辉（1982—），男，硕士，高级工程师，主要研究方向为结构动力学。

Biography：WANG Peng-hui (1982—), Male, Master, Senior engineer, Research focus: structural dynamics.

引文格式：王鹏辉，李哲，童军，等. 基于频率管理的装备振动环境适应性提升[J]. 装备环境工程, 2021, 18(9): 007-013.

WANG Peng-hui, LI Zhe, TONG Jun, et al. Improvement of equipment vibration environment adaptability based on frequency management[J]. Equipment environmental engineering, 2021, 18(9): 007-013.

大的振动[1-2]。

结构振动是模态的叠加，为了防止共振和减小放大系数，需要统筹考虑振源、全系统、分系统和子结构之间的频率匹配关系。如果各因素和系统之间的频率设计和模态匹配合理，就会将结构振动控制在一定的范围之内，从而减少振动对装备的影响，因此开展装备的频率管理工作非常重要。频率管理也就是通过对激励频率和装备各层级频率的综合分析，根据相关准则，通过结构动力学优化设计，使其各个频率之间独立隔离，防止发生耦合共振，从而降低装备各层级上的动力学响应。高效的频率管理工作必须基于结构环境适应性设计、振动传递分析、有限元虚拟仿真和环境试验等内容开展[3-4]。

某蓄压器系统设计完成后，在试验室进行了力学环境试验，试验中 1#导管发生断裂故障。针对该问题，对蓄压器系统进行了有限元仿真分析，获得了主要模态。然后利用有限元仿真方法，对结构进行优化迭代设计，将结构主要频率和激励频率有效隔离。最后将蓄压器安装于振动台，施加定频和随机激励，产品结构和功能完好，通过了试验验证。本项目中首先采用有限元仿真的虚拟试验方法，对频率参数设计进行优化迭代和计算验证，确定改进方案。然后在实际试验台上对改进后的真实产品开展振动试验，验证考核优化结果。虚拟试验和实物试验结合的方法称为“虚实结合”方法，该方法可以使结构振动机理更加清晰，提高产品优化改进的效率。综上所述，基于频率管理的思路和原则，并采用“虚实结合”方法使蓄压器系统的振动环境适应性得到极大提升。

1　频率管理应用现状

在实际工程应用中处理振动问题时，一般都会考虑到结构的模态特性。例如在减振设计、动力学优化、抑制振动放大等工作中，都会将结构的模态参数作为主要参考依据。但是在结构动力学领域，还没有将频率管理的思路和方法形成体系，没有将频率管理贯穿于产品设计全寿命周期内，大多还是问题导向型的后设计和后优化，这将带来产品研制过程的反复和难度。

国外的相关标准和文献中没有系统性的频率管理设计方法和准则，只是提及了频率管理的思路。美国 NASA 的 JSC-65829《航天器载荷及结构动力学要求》基线中指出，在结构设计时，应确保主要结构与航天器上已知的强迫激励频率充分隔离，从而避免调整。针对主要结构以外的其他结构，使其与安装界面的主要频率隔离，避免共振。标准及文献中推荐的准则是：次要结构的基本频率至少为主要结构基本连接界面传递频率的 1.5 倍。主要结构连接界面基本频率限定为 50 Hz 以下的模态，模态有效质量（MEM）> 5%。在欧空局阿里安 5 火箭的研制过程中，使用了频率管理的动力学设计理念进行大质量结构和支架的设计[5-6]。俄罗斯在液体发动机振动试验研究的方法和要求中指出，管路的振动放大系数不应大于 7，当放大系数大于 7 时，建议修改元件的固有频率，以减小系数。其实质是采取将结构频率与激励频率错开和提高结构阻尼等两方面入手，并给出了量化的频率管理要求，从可操作性、可检验性的角度来看，具有重要的参考价值[7]。

近年来，国内航天、轨道交通、汽车领域越来越关注频率管理方法在产品设计和振动故障诊断中的应用，航天系统称之为“频率管理”，轨道交通和汽车行业称之为“模态匹配”，主要的思想是一致的。国内航天领域已在多个型号的结构振动环境适应性设计中开始进行结构频率耦合管理的工作，同时根据火箭整体主振频率，开展频率管理的全面设计和优化，并针对容易耦合或放大幅度较高的结构频率和传递环节进行改进。为了将频率管理工作贯穿于产品设计的全寿命周期内，特别制定了航天结构频率管理的标准规范，包含频率管理的对象、激励源频率特征获取、动力学传递特性获取、管理方法及流程等[7]。

轨道交通和汽车领域将“频率管理”称之为“模态匹配”，并将其思想运用于车辆结构动力学设计、车辆大型设备设计和舒适性提升等工作。文献[8]讲述了重型特种车辆模态匹配的流程、原则和方法，特种车是将悬架系统、车架、动力传动系统、各悬置、进排气各系统作为模态匹配的重点对象，通过计算和试验的方法获取所有系统的模态频率，并制定表格，分析模态表格，查找相近频率，通过优化，使其相近的频率隔离，最终形成符合模态匹配准则的模态频率分布表。文献[9]提出了车下安装设备与车体模态匹配的原则，采用隔振理论和解析方法设计了车下设备悬挂参数，并进行了试验验证。车身主要频率和车下安装设备频率的合理管理有效避免了耦合共振的发生，通过模态匹配工作，车辆获得良好的运行平稳性，同时车下设备振动也不剧烈[9-11]。文献[12]建立了国内轨道车辆系统的有限元模型，通过有限元仿真，获取了车体的模态参数，得出整备状态车体的典型振型以及车顶、侧墙等主要部位的振动形式。根据车体底架模态分析结果，确定车体底架与车下设备的共振部位，采用被动隔振理论进行模态匹配分析。结果表明，基于有限元分析和车辆底架频率响应分析的整车模态匹配方法，能够建立详细准确的车体模态匹配表，辅助规划车体关键设备和车体底架的模态频率，避免关键系统和车体发生共振[12-14]。

2　频率管理研究

2.1　频率管理流程

装备产品频率管理的流程如图 1 所示。根据装备的任务剖面和环境剖面，从明确管理对象开始，依次

获得激励频率、产品频率，以满足频率隔离和放大系数判定准则为目标，进行频率的规划和管理。产品自身的工作振动源也是需要重点考虑的管理内容，频率管理工作贯穿于产品动力学设计和研制的全寿命周期，不断进行迭代改进，直到实际验证通过。

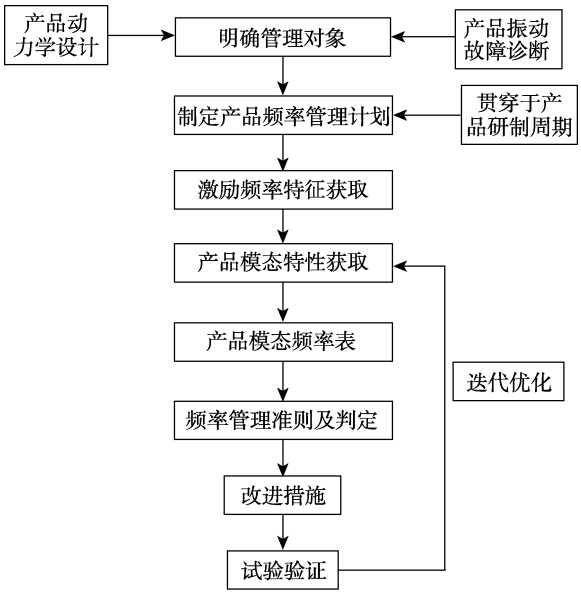


图 1　频率管理工作流程

Fig.1 Flow chart of frequency management

2.2　频率管理原则及判定准则

频率管理是在设计产品过程中对激励源、全系统、子系统和相关部件的频率特性进行控制。一方面，使产品各级结构频率避开周期性或能量较高的窄带激励频率，避免共振放大；另一方面，对产品在各种任务剖面下各层级结构频率参数进行对比、优化和调整，避免系统之间的频率耦合。

1）频率管理的主要原则如下：按产品实际安装和工作边界下的模态特性进行频率管理，频率管理工作应贯穿产品设计和研制全过程；进行结构动力学特性分析，结合历史数据和经验、结构构型特征判断可能的失效模式；明确管理对象，包含整体系统及不同层级结构的具体产品，承受主要动态激励载荷和决定平台整体刚度的结构、通过动连接（运动副、弹性）的两个零部件或系统、在振动传递路径上的结构或系统等都需要关注；激励频率、整体频率、系统频率、零部件频率等纳入管理对象的频率需要遵循“频率隔离准则”，对结构振动贡献较大的振型，其频率要与工作频率（如发动机转速、发电机激励）避开，关键系统在平台上的振动放大系数需要遵循“放大倍数限制准则”；若频率无法避开，并且放大倍数较大时，应分析其特征频率振动产生的动态载荷对结构强度和功能性能的影响程度。

针对防止结构共振放大和隔离激励频率分量传递方法，分别提出了频率隔离准则和放大倍数限制准则。

2）频率隔离准则。为了防止由于外激励引起的结构共振和系统间频率耦合共振，频率隔离准则包括两个方面，分别为激励频率与系统频率隔离准则和系统内各层级频率隔离准则。

根据振动理论，在共振频率处系统将发生剧烈的振动，但是系统发生剧烈振动不仅在共振频率处，而是在共振频率附近的一个区域内，这个区域称为共振区[2]。共振区的范围一般采用半功率带宽来确定。以单自由度系统的振动响应来说明，如图 2 所示。系统的振动传递率 $T(f)$在 $f=f_n$ 时达到最大，放大系数和阻尼有关，为 $Q=1/(2\zeta)$。

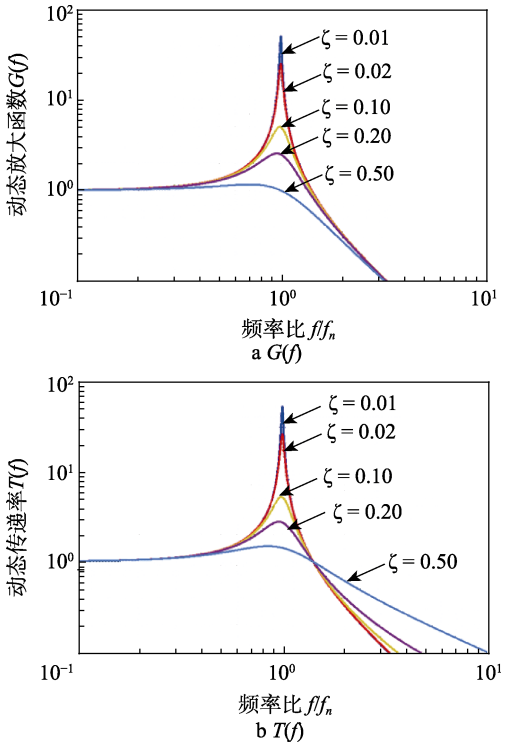


图 2　动态放大函数和传递率幅频曲线

Fig.2 Breadth frequency response curve of dynamic magnify function and dynamic transfer function

从图 2 响应曲线可以看出，无论阻尼如何变化，当系统固有频率 f_n 与激励频率 f 间隔一定距离后，系统的振动响应迅速下降，防止结构在共振区剧烈振动。因此对于单自由度系统，基于半功率带宽制定的激励频率与系统频率隔离准则为：

$$f<0.7f_n \text{ 或 } f>1.5f_n \tag{1}$$

对于多自由度系统，可以转换成一系列单自由度系统。对于频率管理工作来说，不需要对所有自由度系统的频率全部关注，只需要对各层级系统的前 3—5 阶频率或者模态有效质量较大的系统低阶模态关注即可。因此，对于多自由度系统，基于半功率带宽制定的激励频率与系统频率隔离准则为：

$$f<0.7f_1 \text{ 或 } 1.5f_n<f<0.7f_{n+1},\ n=1,2,\cdots \tag{2}$$

式中：f_1 为系统的一阶模态；f_n 和 f_{n+1} 为相邻两

阶系统模态的固有频率，且 $f_n<f_{n+1}$。

对于局部结构频率较高（超过 1000 Hz）、阻尼较小时，实现公式（2）要求的准则就会付出较大的代价，费效比不高。文中结合工程经验，给出了高频局部结构的激励频率与系统频率的隔离准则为：

$$f<0.85f_1 \text{ 或 } 1.15f_n<f<0.85f_{n+1},\ n=1,2,\cdots \quad (3)$$

对于复杂的多层次系统，必须关注层次间的频率管理问题。相对独立的结构组合之间用连接件组成整体时，基础件称为主层次结构，安装在基础件上的结构组合称为次层次结构[15]。以此类推，可以有第三层次、第四层次结构等。

根据线性系统振动理论，i+1 层次结构的一阶固有频率 f_{i+1} 与其安装基础 i 层次的一阶固有频率 f_i 的比值 $\beta=f_{i+1}/f_i\geqslant 2$ 时，其动力放大因子 $\lambda=|H(\omega)|\approx 1$。此时，可将这两个结构视为刚性连接。要实现所有层次结构频率比 $\beta\geqslant 2$ 的要求在工程上比较困难，可以将该要求降低到 $\beta\geqslant 1.5$，但较低层次的结构最好能满足 $\beta\geqslant 2$ 的要求。

因此，对于复杂的多层次系统，系统内各层级频率隔离准则为：

$$\beta=f_{i+1}/f_i\geqslant 2,\ i=1,2,\cdots \quad (4)$$

对于较高层级结构可放宽至：

$$\beta=f_{i+1}/f_i\geqslant 1.5,\ i=1,2,\cdots \quad (5)$$

3）放大倍数限制准则。对于安装在平台上的产品或者包含多层次系统的产品，为了防止产品的振动放大导致结构破坏或功能异常，将产品的振动加速度响应 $\ddot{X}(f)$ 和安装平台的基础运动加速度 $\ddot{U}_0(f)$ 的比值称为动态传递率幅值 $|T(f)|$，该传递率应不大于限定值 Q_{LIMIT}。

$$|T(f)|=\left|\frac{1+j2\zeta(f/f_n)}{1-(f/f_n)^2+j2\zeta(f/f_n)}\right|\leqslant Q_{\text{LIMIT}} \quad (6)$$

Q_{LIMIT} 的选取应和结构具体的材料、连接形式、模态特征、外激励形式、失效模式等各个因素有关，不适宜给出通用化的一般要求。结合工程经验和相关文献，针对电子产品和结构产品只给出建议的取值范围。在能够满足设计要求的情况下，对于电子产品或功能性产品，$Q_{\text{LIMIT}}\leqslant 6$；对于结构类产品，$Q_{\text{LIMIT}}\leqslant 8$。

3　某蓄压器频率管理研究案例

3.1　蓄压器振动断裂情况

蓄压器是运载火箭中的重要装置，安装于发动机氧化剂泵入口处[16]。蓄压器由壳体、膜盒组件、手动开关、导管组件等部件组成。此次研究的某蓄压器结构如图 3 所示。在振动试验中，1 号导管的根部 1 焊缝处发生断裂泄漏，如果在飞行中发生此类故障，将直接影响到火箭飞行的成败，因此必须开展焊缝断裂泄漏的故障机理分析和改进措施研究工作，提升蓄压器的振动环境适应性。

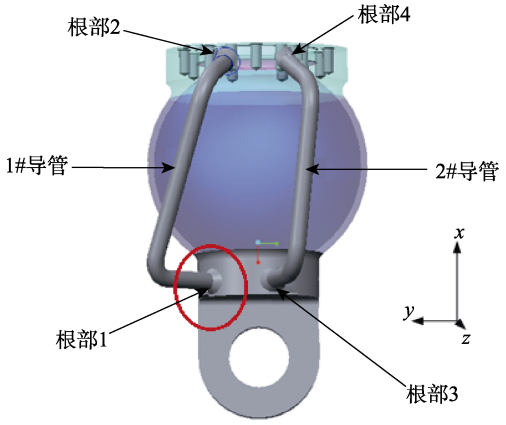


图 3　某蓄压器结构

Fig.3 Structure diagram of an accumulator

蓄压器在工作过程中会受到发动机机械振动、推进剂压力脉动等复杂的振动环境，机械振动为 20~1000 Hz 内的随机振动，推进剂的压力激励由静压和定频脉动压力组成。具体参数：静压为 15 MPa；动压频率为 1800 Hz；动压为 2 MPa；试验时间为 10 h。蓄压器经历随机振动试验后，状态良好。在推进剂压力脉动试验中，经历 10 h、1800 Hz 定频脉动压力和静压的共同作用后，发生了 1#导管根部焊缝断裂泄漏事故。

3.2　蓄压器振动响应仿真计算

为了获取蓄压器 1 号导管根部焊缝断裂的原因，开展了蓄压器在推进剂脉动压力激励下的有限元仿真分析，着重计算了蓄压器内部充压作用下的模态参数、内部静压和脉动压力耦合作用下的振动应力，确定了导管频率与内部推进剂脉动压力频率耦合是造成焊缝断裂的主要原因。

根据图 1 所示的架构模型，建立有限元模型如图 4 所示。焊缝处的细节模型如图 5 所示。计算时，焊高取 3 mm，并建立了局部缺陷。焊料与管路共节点，采用六面体单元简化，其余部分采用高阶四面体单元简化。

施加 15 MPa 内压以及考虑液体附加质量后，计算的模态频率如图 6 所示。计算得 1#、2#导管的弯曲频率分别为 1826、1618 Hz。

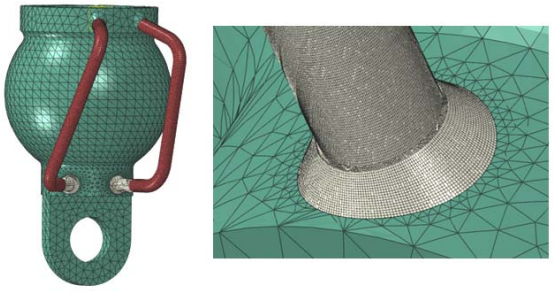


图 4　计算有限元模型

Fig.4 Finite element calculation model

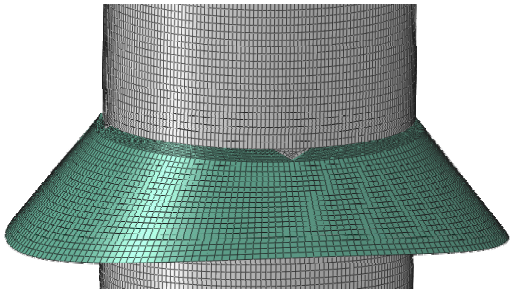


图 5　焊缝局部细节模型
Fig.5 Local detail model of the weld



图 6　充压状态导管频率振型
Fig.6 Frequency and mode shape of duct in pressurized state

当施加 15 MPa 静压和 2 MPa 动压进行扫频计算时，得到的应力随频率变化曲线如图 7 所示，共振频率下的应力分布如图 8 所示。根部受到弯曲应力，最大等效应力为 348.8 MPa。从上述结果来看，蓄压器 1#导管在 1800 Hz 脉动压力激励下发生共振，根部焊缝应力放大，经过 10 h 的共振后疲劳破坏，导致断裂。因此，必须对蓄压器的导管开展频率管理和优化工作，防止共振。

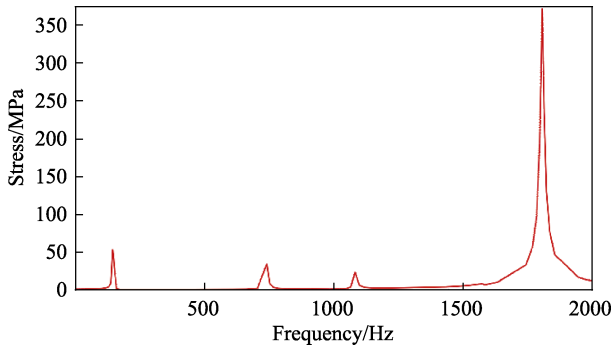


图 7　脉动压力作用下焊缝处应力随频率变化曲线
Fig.7 Stress versus frequency curve of weld under pulsating pressure

3.3　蓄压器的频率管理

根据本文第一节中频率管理的流程、原则和判定准则，蓄压器的频率管理工作主要如下所述。

1）明确管理对象：以蓄压器 1#导管为管理对象，并且确定以避开激励频率为重点。

2）获取激励频率特征：激励频率为 1000 Hz 以内随机振动和 1800 Hz 定频激励，周期性激励能量更大，结构频率必须避开。

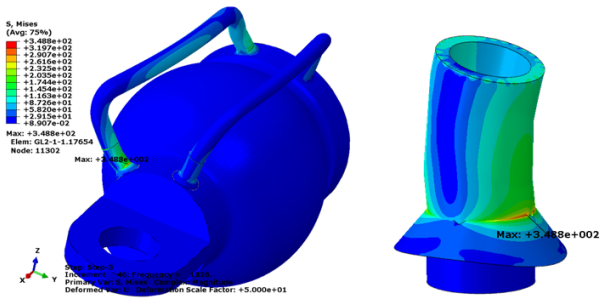


图 8　脉动压力作用下的等效应力
Fig.8 Equivalent stress nephogram under fluctuating pressure

3）产品模态频率表：开展有限元仿真分析，获得比较全面的模态频率分布情况，1826 Hz 放大最多。

4）频率管理准则及判定：根据 1.3 节内容的准则要求，激励频率和产品频率需要满足 $1.15f_n<f<0.85f_{n+1}$ 的要求，所以必须将 1#和 2#导管的频率降低到 1565 Hz 以下，或者提高到 2117 Hz 以上。

5）改进措施：根据导管的模态振型特点，由于导管连接形式无法有较大改变，可以考虑导管的材料、形状和长度等因素。从易于实现的角度出发，确定改进措施为增加导管长度，从而降低频率。在优化过程中，利用有限元仿真分析进行迭代计算，直到满足频率要求为止。

6）计算和试验验证：试验验证可以是虚拟试验、实际试验或两者的结合，建议采用虚实结合的方法进行[17-19]。本项目采用虚实结合方法，先通过有限元仿真进行虚拟试验，验证措施有效后，再进行实际试验验证。

根据上述指导原则和有限元的迭代计算结果采取的改进措施为增加两个导管的长度，1#导管从 150 mm 增加到 175 mm，2#导管从 140 mm 增加到 160 mm，导管改进如图 9 所示。改进后，1#、2#导管的弯曲频率分别为 1520、1266 Hz，频率大幅度下降，满足了频率管理判定准则的要求。

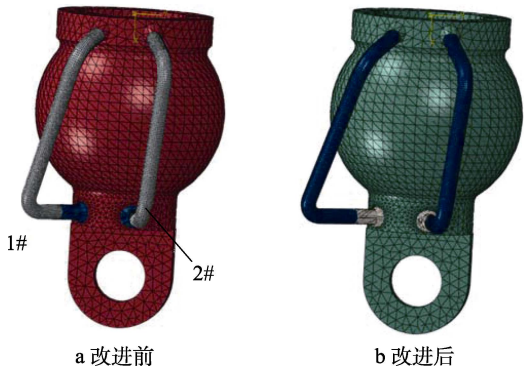


图 9　导管改进示意
Fig.9 improvement diagram of conduit: a) before improvement; b) after improvement

3.4　蓄压器振动环境适应性提升效果

改进前后的蓄压器导管在脉动压力激励下的应力频响曲线如图 10 所示。改进后，蓄压器导管的主要频率下降到 1500 Hz 左右，与激励频率明显隔离，其他频率处的振动放大不明显。1800 Hz 激励下的应力云图和量级对比如图 11 所示，焊缝处的最大 Mises 应力由改进前的 348.8 MPa 降低到 20.5 MPa。因此，当采取频率管理措施后，导管频率与激励频率避开，共振消除，应力水平大幅度降低。后续开展了改进后蓄压器的振动试验，试验后蓄压器结构完好，功能正常，说明改进措施有效。

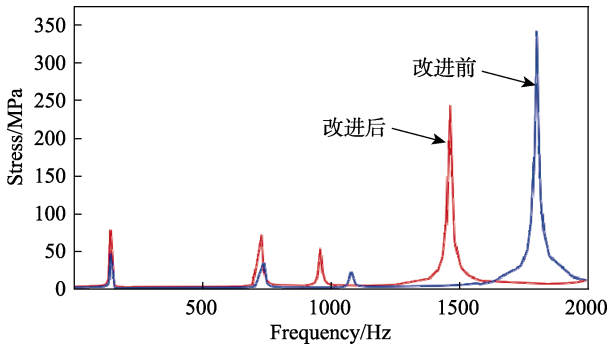


图 10　1#管路改进前后焊缝处应力响应对比
Fig.10 Comparison of stress response at 1# pipe weld

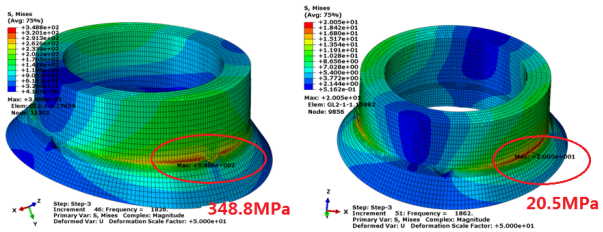


图 11　改进前后 1800 Hz 激励下 1#导管焊缝应力对比
Fig.11 Comparison of weld stress of 1# pipe under 1800 Hz excitation

4　结论

1）通过对振动频率管理的流程、方法、原则和准则等几方面的研究，形成了比较实用的结构振动控制方法，对提升装备的振动环境适应性具有重要的指导意义。

2）蓄压器导管改进后的振动环境适应能力得到极大提升，经考核，能够满足使用环境的要求。因此基于频率管理的思路和原则，并采用虚实结合的方法进行结构动力学优化设计，切实能够提高装备的振动环境适应性水平。

3）目前国内外越来越重视产品性能提升，很多行业开始将产品结构动力学设计贯穿于全寿命周期内，建议将频率管理作为结构动力学设计的基本原则。

参考文献：

[1] GJB 4239—2001, 装备环境工程通用要求[S].
GJB 4239—2001, General requirements for equipment environmental engineering[S].

[2] 诸德超, 邢誉峰, 程伟, 李敏. 工程振动基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004.
ZHU De-chao, XING Yu-feng, CHENG Wei, et al. Foundation of engineering vibration[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 2004.

[3] 祝耀昌, 王建刚. 各种环境试验的特点及其应用分析[J]. 航空标准化与质量, 2005(1): 38-42.
ZHU Yao-chang, WANG Jian-gang. Analysis of characteristics and application of various environmental test[J]. Aeronautic standardization & quality, 2005(1): 38-42.

[4] 祝耀昌, 孙建勇. 装备环境工程技术及应用[J]. 装备环境工程, 2005, 2(6): 1-9.
ZHU Yao-chang, SUN Jian-yong. Materiel environmental engineering technology and its application[J]. Metal forming technology, 2005, 2(6): 1-9.

[5] Ariane5 Launcher Structure and Technology Translation Group. Ariane5 launcher structure and technology version[M]. Beijing: First Academy of China Aerospace Science and TechnologyCorporation Press,1999.

[6] NASA-JSC-65829. Loads and structural dynamics requirements for spaceflight hardware[S].

[7] 王帅, 王丽霞, 梁吉鹏, 等. 航天结构振动频率管理方法研究[J]. 强度与环境, 2020, 47(1): 8-16.
WANG Shuai, WANG Li-xia, LIANG Ji-peng, et al. Vibration frequency management research for aerospace structures[J]. Structure & environment engineering, 2020, 47(1): 8-16.

[8] 张生, 邢宏健, 陆江. 多轴重型特种车模态匹配应用研究[J]. 重型汽车, 2017(3): 5-8.
ZHANG Sheng, XING Hong-jian, LU Jiang. Application Research on modal matching of multi axle heavy special vehicle[J]. Heavy truck, 2017(3): 5-8.

[9] 宫岛, 周劲松, 孙文静, 等. 高速列车车下设备模态匹配及试验研究[J]. 铁道学报, 2014, 36(10): 13-20.
GONG Dao, ZHOU Jin-song, SUN Wen-jing, et al. Modal matching between suspended equipment and car body of a high-speed railway vehicle and *in situ* experiment[J]. Journal of the China railway society, 2014, 36(10): 13-20.

[10] 宫岛, 周劲松, 孙文静, 等. 高速列车车下设备模态匹配研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(8): 180-185.
GONG Dao, ZHOU Jin-song, SUN Wen-jing, et al. Modes matching between suspended devices and car body for a high-speed railway vehicle[J]. Journal of vibration and shock, 2014, 33(8): 180-185.

[11] 宫岛, 周劲松, 孙文静, 等. 高速列车弹性车体与转向架耦合振动分析[J]. 交通运输工程学报, 2011, 11(4): 41-47.
GONG Dao, ZHOU Jin-song, SUN Wen-jing, et al. Coupled vibration analysis of flexible car body and bogie

for high-speed train[J]. Journal of traffic and transportation engineering, 2011, 11(4): 41-47.

[12] 尤泰文, 周劲松, 宫岛, 等. 基于频响分析的轨道车辆模态匹配研究[C]//提高旅客舒适度学术研讨会论文集. 长春: 中国铁道学会, 2016.
YOU Tai-wen, ZHOU Jin-song, GONG Dao, et al. Modal matching of rail vehicles based on frequency response analysis[C]//Proceedings of the symposium on improving passenger comfort. Changchun: China Railway Society, 2016.

[13] 陈无畏, 邓书朝, 黄鹤, 等. 基于模态匹配的车架动态特性优化[J]. 汽车工程, 2016, 38(12): 1488-1493.
CHEN Wu-wei, DENG Shu-chao, HUANG He, et al. Dynamic characteristics optimization of frame for modal matching[J]. Automotive engineering, 2016, 38(12): 1488-1493.

[14] 孙玉华, 董大伟, 闫兵, 等. 双层隔振系统模态匹配分析及其振动特性[J]. 振动 测试与诊断, 2014, 34(4): 727-731, 781.
SUN Yu-hua, DONG Da-wei, YAN Bing, et al. Modal matching analysis and vibration characteristics of two-stage vibration isolation system[J]. Journal of vibration, measurement & diagnosis, 2014, 34(4): 727-731, 781.

[15] 季馨, 王树荣. 电子设备振动环境适应性设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 2012.
JI Xin, WANG Shu-rong. Vibration environment adaptive design of electronic equipment[M]. Beijing: Publishing House of Electronics industry, 2012.

[16] 满满, 张婷, 司徒斌, 等. 蓄压器 POGO 抑制机理的向量表示及阻抗分析法[J]. 导弹与航天运载技术, 2018(4): 113-115.
MAN Man, ZHANG Ting, SITU Bin, et al. Vector representation and impedance analysis method on POGO suppression of accumulator[J]. Missiles and space vehicles, 2018(4): 113-115.

[17] 赵经文, 王宏钰. 结构有限元分析[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2001.
ZHAO Jing-wen, WANG Hong-yu. Structural finite element analysis[M]. 2nd edition. Beijing: Science Press, 2001.

[18] 王华, 许江文. 有限元分析在结构振动设计中的应用[J]. 机械研究与应用, 2014, 27(2): 107-108.
WANG Hua, XU Jiang-wen. Application of finite element analysis in structural vibration design[J]. Mechanical research & application, 2014, 27(2): 107-108.

[19] 钟云龙, 李泉, 蒋灿, 等. 某机载设备电路板振动仿真与实测验证方法[J]. 自动化与仪表, 2018, 33(7): 90-93.
ZHONG Yun-long, LI Quan, JIANG Can, et al. Method on the vibration simulation and practical test of PCB used in the certain airborne equipment[J]. Automation & instrumentation, 2018, 33(7): 90-93.